

Pour se préparer aux mathématiques post-bac :  
QUELQUES ÉLÉMENTS  
DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE

IREM d'Orléans  
groupe liaison lycée post-bac

## Table des matières

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Énoncés mathématiques</b>                                  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Quantificateurs . . . . .                                     | 3         |
| 1.2      | Ordre des quantificateurs . . . . .                           | 5         |
| 1.3      | Négation . . . . .                                            | 6         |
| 1.4      | Le <i>et</i> et le <i>ou</i> . . . . .                        | 7         |
| <b>2</b> | <b>Implication</b>                                            | <b>9</b>  |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                        | 9         |
| 2.2      | Généralisons . . . . .                                        | 10        |
| 2.3      | Une première méthode pour démontrer une implication . . . . . | 10        |
| 2.4      | Une autre méthode : utilisation de la contraposée . . . . .   | 11        |
| 2.5      | Condition nécessaire, condition suffisante . . . . .          | 12        |
| <b>3</b> | <b>Équivalence</b>                                            | <b>13</b> |
| 3.1      | Définition . . . . .                                          | 13        |
| 3.2      | Démonstration d'équivalence par implications . . . . .        | 14        |
| 3.2.1    | Par double implication . . . . .                              | 14        |
| 3.2.2    | Astuce lorsqu'il y a plus de deux énoncés . . . . .           | 15        |
| 3.3      | Équivalences successives . . . . .                            | 16        |
| <b>4</b> | <b>Ensembles</b>                                              | <b>17</b> |
| 4.1      | Intersection . . . . .                                        | 17        |
| 4.2      | Réunion . . . . .                                             | 18        |
| 4.3      | Complémentation . . . . .                                     | 19        |
| 4.4      | Partition d'un ensemble . . . . .                             | 20        |
| 4.5      | Produit cartésien . . . . .                                   | 21        |
| 4.6      | Inclusion . . . . .                                           | 22        |
| <b>5</b> | <b>Mise en œuvre de différentes formes de raisonnements</b>   | <b>23</b> |
| 5.1      | Raisonnement par l'absurde . . . . .                          | 23        |
| 5.2      | Raisonnement par disjonction de cas . . . . .                 | 24        |

|          |                                                                         |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.3      | Raisonnement par récurrence . . . . .                                   | 26        |
| 5.3.1    | Exemple . . . . .                                                       | 26        |
| 5.3.2    | L'initialisation : une étape essentielle . . . . .                      | 28        |
| 5.3.3    | L'hérédité : une rédaction à soigner . . . . .                          | 28        |
| 5.3.4    | Récurrence ou pas ? . . . . .                                           | 29        |
| 5.3.5    | Choix de la propriété à démontrer : quelques exemples plus difficiles . | 31        |
| <b>6</b> | <b>Exercices</b>                                                        | <b>33</b> |
| 6.1      | Énoncés . . . . .                                                       | 33        |
| 6.2      | Corrections . . . . .                                                   | 36        |

# Introduction

Il ne s'agit pas ici de faire un cours de logique, mais plutôt de donner une idée intuitive de ce qu'est la logique mathématique, de préciser les règles de calculs et les différents modes de raisonnement intervenant dans les démonstrations en mathématiques.

La logique s'intéresse d'une part aux règles de construction des phrases mathématiques (la grammaire) et d'autre part, à la vérité de ces phrases.

## Exemples

1.  $1 + 1 = 2$
2.  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 2$

Ces phrases mathématiques sont grammaticalement correctes. Elles ont un sens, mais si ce que l'exemple 1. énonce est vrai, ce que l'exemple 2. énonce ne l'est pas.

On remarquera que le fait que l'énoncé 2. soit faux est relatif au fait que l'on a imposé, dans la théorie des nombres, que 1 est plus petit que 2.

Toutes les vérités que l'on établit en mathématiques sont donc des vérités relatives et non des vérités absolues : elles dépendent du choix des axiomes que l'on impose comme vrais.

Des phrases correctes du point de vue de la syntaxe, comme les exemples précédents, sont appelées des propositions ou énoncés.

En général, on désigne les propositions par des lettres majuscules.

$P : 1 < 2$  est une proposition qui est vraie.

Quelquefois, apparaissent dans les énoncés des « lettres » indéterminées, comme le montre l'exemple ci-dessous :

$Q : x$  est un entier.

Cette proposition indéterminée devient déterminée si on donne une valeur à  $x$ . On la note  $Q(x)$  au lieu de  $Q$ .

$Q(0)$  est une proposition vraie.

$Q\left(\frac{1}{2}\right)$  est une proposition fausse.

Dans ce qui suit, on va étudier les règles permettant d'établir des vérités mathématiques à l'aide de propositions.

## 1 Énoncés mathématiques

### 1.1 Quantificateurs

On considère les deux égalités suivantes :

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \tag{1}$$

$$(x + 1)^2 = x^2 + 1 \tag{2}$$

dans lesquelles la lettre  $x$  désigne un nombre réel.

L'égalité (1) est connue depuis longtemps comme une identité remarquable. On peut constater que, pour n'importe quelle valeur du nombre réel  $x$ , l'égalité (1) est vérifiée. Dans ce cas, on écrit :

$$\text{« pour tout } x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \text{ ».}$$

« Pour tout » est appelé le **quantificateur universel**.

On peut penser que l'égalité (2) est fausse. Et pourtant, pour  $x = 0$ , elle est vérifiée. Peut-on alors dire que l'égalité (2) est vraie? Non, car pour  $x = 1$ , elle ne l'est pas. Pour fabriquer une phrase vraie, il faut compléter l'égalité (2) par :

$$\text{« il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x + 1)^2 = x^2 + 1 \text{ ».}$$

« Il existe » est appelé le **quantificateur existentiel**.

**Remarque** Si l'on revient à l'égalité (1), on peut constater que

$$\text{« il existe } x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \text{ »}$$

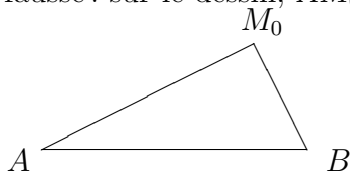
est aussi une phrase vraie (elle est vérifiée pour  $x = 1$ , par exemple).

**Exercice** On considère deux points distincts  $A$  et  $B$  du plan. Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont vraies?

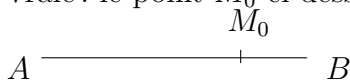
1. Pour tout point  $M$  du plan,  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ .
2. Il existe un point  $M$  du plan tel que  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ .
3. Pour tout point  $M$  du plan,  $AM + MB = AB$ .
4. Il existe un point  $M$  du plan tel que  $AM + MB = AB$ .
5. Pour tout point  $M$  du plan,  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ .
6. Il existe un point  $M$  du plan tel que  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ .
7. Pour tout point  $M$  du plan,  $AM = MB$ .
8. Il existe un point  $M$  du plan tel que  $AM = MB$ .
9. Pour tout point  $M$  du plan,  $AM + MB \geq AB$ .
10. Il existe un point  $M$  du plan tel que  $AM + MB \geq AB$ .
11. Pour tout point  $M$  du plan,  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .
12. Il existe un point  $M$  du plan tel que  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

### Solution

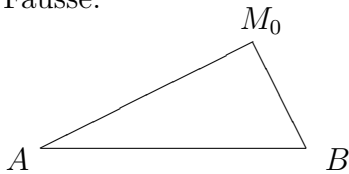
1. C'est vrai. On reconnaît la relation de Chasles.
2. Automatiquement vraie, puisque 1. est vraie.
3. fausse : sur le dessin,  $AM_0 + M_0B > AB$ .



4. Vraie : le point  $M_0$  ci-dessous convient. En fait, tout point du segment  $[AB]$  convient.



5. Fausse.



6. Vraie : le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  convient. En fait, seul le point  $I$  convient.

7. Fausse.

8. Vraie : le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  convient. En fait, tout point de la médiatrice convient.

9. Vraie : inégalité triangulaire.

10. Automatiquement vraie, puisque 9. est vraie.

11. et 12. Manifestement fausses. S'il existait un tel point  $M_0$ , on aurait, d'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{AB}$$

ce qui donnerait  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ . Or  $A$  et  $B$  sont distincts.

## 1.2 Ordre des quantificateurs

On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On veut traduire par une phrase mathématique le fait que cette fonction est constante sur  $\mathbb{R}$ .

L'énoncé « pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$  » ne convient pas puisque  $c$  n'est pas défini. Pour introduire  $c$ , on dit souvent :

« pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$  où  $c$  est un réel donné ».

Mais il est préférable d'utiliser le quantificateur existentiel. Considérons par exemple la phrase :

$$\text{« pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = c \text{ ».} \quad (3)$$

Cette phrase signifie-t-elle que la fonction  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ ? Non ! Cette phrase est vérifiée par toute fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

Montrons, par exemple, que la fonction carré ne vérifie pas la phrase (3).

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de  $x$ , on peut prendre  $c = x^2$ . Par exemple,

pour  $x = 2$ , on trouve  $c = 4$  ;

pour  $x = 3$ , on trouve  $c = 9$ .

La phrase (3) est vérifiée. Pourtant  $f$  n'est pas constante. La valeur de  $c$  change avec celle de  $x$ . En fait,  $c$  dépend de  $x$ .

Il faut introduire  $c$  avant  $x$  pour que  $c$  ne dépende pas de  $x$ . C'est pourquoi, pour traduire qu'une fonction  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ , on écrira :

$$\text{« il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = c \text{ ».} \quad (4)$$

**Conclusion** Dans une phrase mathématique l'ordre des quantificateurs est important.

Une exception toutefois : lorsque les deux quantificateurs se suivent et sont identiques, l'ordre dans lequel on les écrit n'a pas d'importance.

**Exemple** « Il existe  $x \in \mathbb{R}$  et il existe  $y \in \mathbb{R}$  tels que  $x^2 + y^2 = 1$  » et « Il existe  $y \in \mathbb{R}$  et il existe  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $x^2 + y^2 = 1$  » sont les mêmes phrases.

**Exercices :** 1 et 2 p. 33.

### 1.3 Négation

**Premier exemple** Considérons l'énoncé

$P$  : « Il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x^2 + x + 1 = 0$  ».

Cette phrase veut dire que l'équation  $x^2 + x + 1 = 0$  a une solution (au moins) dans  $\mathbb{R}$ .

En fait, aucun nombre réel n'est solution de cette équation car le discriminant est strictement négatif. Ceci se traduit par l'énoncé suivant, qui utilise les quantificateurs vus précédemment :

« Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + x + 1 \neq 0$  ».

Ce nouvel énoncé est appelé la négation de  $P$  et on le note  $\text{non-}P$ .

Dans cet exemple,  $P$  est faux et  $\text{non-}P$  est vrai.

**Autre exemple** On considère l'énoncé

$P$  : « pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x + \frac{1}{x} \geq 3$  ».

Cet énoncé est faux parce que l'on peut trouver au moins un nombre  $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $x_0 + \frac{1}{x_0} < 3$  (par exemple  $x_0 = 1$ ).

La négation de  $P$  est donc

$\text{non-}P$  : « il existe  $x \in \mathbb{R}_+^*$  tel que,  $x + \frac{1}{x} < 3$  ».

$\text{non-}P$  est vrai.

**Remarque** L'énoncé « pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x + \frac{1}{x} < 3$  » n'est pas la négation de  $P$ .

|                |                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Règle 1</b> | Étant donnée une propriété $Q$ qui peut être vérifiée par des éléments $x$ d'un ensemble $A$ , la négation de<br>$P$ : « il existe $x \in A$ tel que $x$ vérifie la propriété $Q$ »<br>est<br>$\text{non-}P$ : « pour tout $x \in A$ , $x$ ne vérifie pas la propriété $Q$ ». |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                |                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Règle 2</b> | Étant donnée une propriété $Q$ qui peut être vérifiée par des éléments $x$ d'un ensemble $A$ , la négation de<br>$P$ : « pour tout $x \in A$ , $x$ vérifie la propriété $Q$ »<br>est<br>$\text{non-}P$ : « il existe $x \in A$ tel que $x$ ne vérifie pas la propriété $Q$ ». |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Exercice** On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et les deux énoncés :

$P$  : la fonction  $f$  est nulle ;

non- $P$  : la fonction  $f$  n'est pas nulle.

Parmi les réponses suivantes, reconnaître  $P$  et non- $P$  :

1.  $f(x) = 0$ .
2.  $f(x) \neq 0$ .
3. Il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = 0$ .
4. Il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \neq 0$ .
5. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$ .
6. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq 0$ .

**Réponses**  $P$  : 5 ; non- $P$  : 4.

## 1.4 Le *et* et le *ou*

Étant donné un nombre réel  $x$ , considérons les énoncés suivants :

$P$  : «  $x^2 > 1$  ».

$Q$  : «  $x < 0$  ».

On s'intéresse d'une part à l'énoncé

«  $x^2 > 1$  et  $x < 0$  »

et d'autre part à l'énoncé

«  $x^2 > 1$  ou  $x < 0$  ».

Prenons quelques exemples et considérons le tableau suivant, dans lequel V signifie vrai et F signifie faux.

| $x$           | $x^2 > 1$ | $x < 0$ | $x^2 > 1$ et $x < 0$ | $x^2 > 1$ ou $x < 0$ |
|---------------|-----------|---------|----------------------|----------------------|
| -5            | V         | V       | V                    | V                    |
| $\sqrt{3}$    | V         | F       | F                    | V                    |
| -0,8          | F         | V       | F                    | V                    |
| $\frac{5}{6}$ | F         | F       | F                    | F                    |

Plus généralement :  
l'énoncé ( $P$  et  $Q$ ) correspond à la table  
suivante

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ |
|-----|-----|------------|
| V   | V   | V          |
| V   | F   | F          |
| F   | V   | F          |
| F   | F   | F          |

Ainsi, l'énoncé ( $P$  et  $Q$ ) est vrai lorsque  $P$  est vrai et  $Q$  est vrai et seulement dans ce cas.

( $P$  et  $Q$ ) est faux dès que l'un est faux.

l'énoncé ( $P$  ou  $Q$ ) correspond à la table  
suivante

| $P$ | $Q$ | $P$ ou $Q$ |
|-----|-----|------------|
| V   | V   | V          |
| V   | F   | V          |
| F   | V   | V          |
| F   | F   | F          |

Ainsi, l'énoncé ( $P$  ou  $Q$ ) est vrai lorsque l'un des trois cas suivants est réalisé :

- $P$  est vrai et  $Q$  est vrai ;
- $P$  est vrai et  $Q$  est faux ;
- $P$  est faux et  $Q$  est vrai.

( $P$  ou  $Q$ ) est faux lorsque  $P$  est faux et  $Q$  est faux et seulement dans ce cas.

**Remarque 1** On remarque que si  $P$  et  $Q$  sont vrais, alors ( $P$  ou  $Q$ ) est vrai. Dans la vie courante, le *ou* n'a pas forcément la même signification. Ainsi, au restaurant, « fromage ou dessert » exclut de prendre les deux !

**Remarque 2** Dans certaines phrases mathématiques, le *ou* est caché. Par exemple, pour  $x \in \mathbb{R}$ , l'écriture  $x \geq 1$  signifie «  $x > 1$  ou  $x = 1$  ».

Ainsi,

$$5 \geq 1 \text{ est vrai car } 5 > 1 ;$$

$$1 \geq 1 \text{ est vrai car } 1 = 1.$$

**Exemple**  $A, B, C$  et  $D$  étant des points deux à deux distincts du plan, on considère les énoncés  $P$ : « ( $AB$ ) est parallèle à ( $CD$ ) » et  $Q$ : « ( $AD$ ) est parallèle à ( $BC$ ) ».

( $P$  et  $Q$ ) est vrai dans le cas où  $ABCD$  est un parallélogramme et seulement dans ce cas.

( $P$  ou  $Q$ ) est vrai dans les trois situations suivantes :

1. ( $AB$ ) parallèle à ( $CD$ ) ; ( $AD$ ) parallèle à ( $BC$ )
2. ( $AB$ ) parallèle à ( $CD$ ) ; ( $AD$ ) non parallèle à ( $BC$ )
3. ( $AB$ ) non parallèle à ( $CD$ ) ; ( $AD$ ) parallèle à ( $BC$ )

( $P$  ou  $Q$ ) est vrai lorsque  $ABCD$  est un trapèze (on rappelle qu'un parallélogramme est un trapèze particulier).

**Négation** Dans l'exemple précédent, l'énoncé ( $P$  ou  $Q$ ) correspond à : «  $ABCD$  est un trapèze ». Sa négation correspond donc à : «  $ABCD$  n'est pas un trapèze ».

$ABCD$  n'est pas un trapèze signifie que :

- ni ( $AB$ ) n'est parallèle à ( $CD$ ), ni ( $AD$ ) n'est parallèle à ( $BC$ ) ;
- $P$  est faux et  $Q$  est faux ;

–  $((\text{non-}P) \text{ et } (\text{non-}Q))$  est vrai.

Finalement, la négation de l'énoncé  $(P \text{ ou } Q)$  correspond à l'énoncé  $((\text{non-}P) \text{ et } (\text{non-}Q))$ .

De manière générale, prouvons que la négation de l'énoncé  $(P \text{ ou } Q)$  est l'énoncé  $((\text{non-}P) \text{ et } (\text{non-}Q))$  en comparant les tables :

| $P$ | $Q$ | $P \text{ ou } Q$ | $\text{non-}(P \text{ ou } Q)$ | $P$ | $Q$ | $\text{non-}P$ | $\text{non-}Q$ | $(\text{non-}P) \text{ et } (\text{non-}Q)$ |
|-----|-----|-------------------|--------------------------------|-----|-----|----------------|----------------|---------------------------------------------|
| V   | V   | V                 | F                              | V   | V   | F              | F              | F                                           |
| V   | F   | V                 | F                              | V   | F   | F              | V              | F                                           |
| F   | V   | V                 | F                              | F   | V   | V              | F              | F                                           |
| F   | F   | F                 | V                              | F   | F   | V              | V              | V                                           |

De manière analogue, prouvons que la négation de l'énoncé  $(P \text{ et } Q)$  est l'énoncé  $((\text{non-}P) \text{ ou } (\text{non-}Q))$  en comparant les tables :

| $P$ | $Q$ | $P \text{ et } Q$ | $\text{non-}(P \text{ et } Q)$ | $P$ | $Q$ | $\text{non-}P$ | $\text{non-}Q$ | $(\text{non-}P) \text{ ou } (\text{non-}Q)$ |
|-----|-----|-------------------|--------------------------------|-----|-----|----------------|----------------|---------------------------------------------|
| V   | V   | V                 | F                              | V   | V   | F              | F              | F                                           |
| V   | F   | F                 | V                              | V   | F   | F              | V              | V                                           |
| F   | V   | F                 | V                              | F   | V   | V              | F              | V                                           |
| F   | F   | F                 | V                              | F   | F   | V              | V              | V                                           |

On retiendra que :

l'énoncé  $\text{non-}(P \text{ et } Q)$  est l'énoncé  $((\text{non-}P) \text{ ou } (\text{non-}Q))$  ;  
l'énoncé  $\text{non-}(P \text{ ou } Q)$  est l'énoncé  $((\text{non-}P) \text{ et } (\text{non-}Q))$ .

**Exercices :** 3 à 6 p. 34.

## 2 Implication

### 2.1 Introduction

On sait que :

tout entier naturel multiple de 6 est multiple de 3.

On peut aussi le formuler de la manière suivante :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n$  est multiple de 6, alors  $n$  est multiple de 3

ou encore

dans  $\mathbb{N}$ , (« être multiple de 6 » implique « être multiple de 3 »).

Construisons le tableau suivant, dans lequel V signifie vrai et F signifie faux.

| $n$ | (multiple de 6) | (multiple de 3) |
|-----|-----------------|-----------------|
| 12  | V               | V               |
| 9   | F               | V               |
| 5   | F               | F               |
| ?   | V               | F               |

On constate facilement qu'il n'est pas possible de trouver une valeur du nombre  $n$  convenant pour la dernière ligne.

Nous avons trouvé trois énoncés vrais en mathématiques :

- « 12 est multiple de 6 » implique « 12 est multiple de 3 » ;
- « 9 est multiple de 6 » implique « 9 est multiple de 3 » ;
- « 5 est multiple de 6 » implique « 5 est multiple de 3 ».

Les deux derniers sont bien vrais, contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser penser.

## 2.2 Généralisons

Dans le cadre mathématique,  $P$  et  $Q$  étant des énoncés, on dit que  $P$  **implique**  $Q$  lorsque l'un des trois cas suivants est réalisé :

1.  $P$  vrai et  $Q$  vrai ;
2.  $P$  faux et  $Q$  vrai ;
3.  $P$  faux et  $Q$  faux.

La table suivante définit un nouvel énoncé, noté  $(P \implies Q)$  et appelé **implication**.

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ |
|-----|-----|----------------|
| V   | V   | V              |
| V   | F   | F              |
| F   | V   | V              |
| F   | F   | V              |

L'implication  $(P \implies Q)$  est fautive dans un seul cas, celui de la deuxième ligne : le cas où  $P$  est vrai et  $Q$  faux. C'est le seul cas où l'énoncé  $(P \text{ et } (\text{non } Q))$  est vrai. On en déduit que l'implication  $(P \implies Q)$  est la négation de  $(P \text{ et } (\text{non } Q))$ . Autrement dit :

l'implication  $(P \implies Q)$  signifie  $((\text{non } P) \text{ ou } Q)$ .

## 2.3 Une première méthode pour démontrer une implication

**Remarque** D'après le tableau ci-dessus, l'implication est de toute façon vraie lorsque  $P$  est faux. Une première méthode pour démontrer l'implication  $(P \implies Q)$  est donc d'envisager seulement le cas où  $P$  est vrai. On commence la démonstration en supposant que  $P$  est vrai et on doit aboutir au fait que  $Q$  est vrai.

**Exemple** On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto x^2 + ix. \end{aligned}$$

On veut montrer que pour tous éléments  $x$  et  $x'$  de  $\mathbb{R}$ , on a l'implication

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

| Rédaction                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Soient <math>x \in \mathbb{R}</math>, <math>x' \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>Démontrons l'implication</p> $f(x) = f(x') \implies x = x'.$ <p>Supposons que <math>f(x) = f(x')</math> et montrons que <math>x = x'</math>.</p> <p>D'après l'hypothèse <math>f(x) = f(x')</math>, on a</p> $x^2 + ix = x'^2 + ix',$ <p>avec <math>x^2, x'^2, x</math> et <math>x'</math> réels.<br/>Les nombres complexes étant égaux, leurs parties imaginaires sont égales, donc on obtient</p> $x = x'$ | <p>On veut démontrer l'implication pour tout <math>x</math> et <math>x'</math> de <math>\mathbb{R}</math>, il faut donc commencer par prendre deux éléments quelconques de <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>Comme l'indique la remarque précédente, le cas <math>f(x) \neq f(x')</math> ne nous intéresse pas, l'implication est alors vraie. Dans ce cas, il n'y a donc rien à démontrer, tout est gagné d'avance. On se place alors seulement dans le cas <math>f(x) = f(x')</math>.</p> |

## 2.4 Une autre méthode : utilisation de la contraposée

Reprenons la table de vérité de l'implication ( $P \implies Q$ ):

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ |
|-----|-----|----------------|
| V   | V   | V              |
| V   | F   | F              |
| F   | V   | V              |
| F   | F   | V              |

On remarque que l'implication est de toute façon vraie lorsque  $Q$  est vrai. Une seconde méthode pour démontrer l'implication ( $P \implies Q$ ) est donc d'envisager seulement le cas où  $Q$  est faux. On doit aboutir au fait que  $P$  est faux.

Autrement dit, démontrer l'implication ( $P \implies Q$ ) revient à démontrer l'implication ((non  $Q$ )  $\implies$  (non  $P$ )). On dit que l'implication ((non  $Q$ )  $\implies$  (non  $P$ )) est la **contraposée** de l'implication ( $P \implies Q$ ).

Par exemple, la contraposée de l'implication ( $f(x) = f(x') \implies x = x'$ ) est l'implication ( $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ ).

**Exemple** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a l'implication «  $n^2$  est pair »  $\implies$  «  $n$  est pair ».

| Rédaction                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Soit <math>n \in \mathbb{N}</math>.</p> <p>Démontrer l'implication</p> <p style="text-align: center;"><math>\ll n^2 \text{ est pair} \gg \implies \ll n \text{ est pair} \gg</math></p> <p>revient à démontrer sa contraposée :</p> <p style="text-align: center;"><math>\ll n \text{ est impair} \gg \implies \ll n^2 \text{ est impair} \gg</math>.</p> <p>Supposons que <math>n</math> est impair.</p> <p>Il existe <math>k \in \mathbb{N}</math> tel que <math>n = 2k + 1</math>.<br/>On a donc</p> $\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$ <p>On pose <math>k' = 2k^2 + 2k</math>,<br/>or <math>k \in \mathbb{N}</math> donc <math>k' \in \mathbb{N}</math> et</p> $n^2 = 2k' + 1$ <p>donc <math>n^2</math> est impair.</p> | <p>On veut démontrer l'implication pour tout <math>n</math> de <math>\mathbb{N}</math>, il faut donc commencer par prendre un élément quelconque de <math>\mathbb{N}</math>.<br/>La démonstration de la contraposée semble plus simple que celle de l'implication demandée, qui fait appel à des théorèmes d'arithmétique.</p> <p>Le cas où <math>n</math> est pair ne nous intéresse pas, l'implication est alors vraie. Dans ce cas, il n'y a donc rien à démontrer, tout est gagné d'avance. On se place alors seulement dans le cas où <math>n</math> est impair.</p> <p>Il suffit de développer pour voir apparaître le résultat. On n'utilise aucun théorème d'arithmétique.</p> |

## 2.5 Condition nécessaire, condition suffisante

L'énoncé  $(P \implies Q)$  n'est faux que lorsque  $P$  est vrai et  $Q$  est faux. L'implication  $(P \implies Q)$  est vraie dans tous les autres cas.

Cela conduit à d'autres formulations de l'implication  $(P \implies Q)$  :

- $P$  implique  $Q$  ;
- si  $P$  est vrai, alors  $Q$  est vrai ;
- pour que  $Q$  soit vrai, il est suffisant que  $P$  soit vrai (ou encore il suffit que  $P$  soit vrai) ;
- pour que  $P$  soit vrai, il est nécessaire que  $Q$  soit vrai (ou encore il faut que  $Q$  soit vrai).

Ainsi, lorsque l'énoncé  $(P \implies Q)$  est vrai :

- $P$  est une condition suffisante pour  $Q$  ;
- $Q$  est une condition nécessaire de  $P$ .

**Exemple** Dans l'espace euclidien orienté  $E$ , on sait que si deux vecteurs sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul. L'implication suivante est vraie :

$$\left(\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}\right) \implies \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}\right).$$

Autrement dit :

- $\left(\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}\right)$  est une condition suffisante pour que  $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}\right)$ ;
- $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}\right)$  est une condition nécessaire pour que  $\left(\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}\right)$ .

**Remarque**  $\left(\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}\right)$  n'est pas une condition nécessaire pour que  $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}\right)$ . En effet, l'implication  $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}\right) \implies \left(\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}\right)$  est fautive.

**Exercices :** 7 et 8 p. 34.

## 3 Équivalence

### 3.1 Définition

**Définition** On dit que les énoncés  $P$  et  $Q$  sont **équivalents** si les implications  $(P \implies Q)$  et  $(Q \implies P)$  sont toutes les deux vraies. On note  $(P \iff Q)$ .

**Table de vérité de l'équivalence** Reprenons les tables de vérité des implications :

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ | $Q \implies P$ |
|-----|-----|----------------|----------------|
| V   | V   | V              | V              |
| V   | F   | F              | V              |
| F   | V   | V              | F              |
| F   | F   | V              | V              |

L'équivalence  $(P \iff Q)$  est vraie chaque fois que les implications  $(P \implies Q)$  et  $(Q \implies P)$  sont toutes les deux vraies. Il suffit donc de retenir les lignes dans lesquelles on trouve deux V dans les deux dernières colonnes. On obtient le tableau suivant :

| $P$ | $Q$ | $P \iff Q$ |
|-----|-----|------------|
| V   | V   | V          |
| V   | F   | F          |
| F   | V   | F          |
| F   | F   | V          |

On voit alors que l'équivalence  $(P \iff Q)$  est vraie lorsque  $P$  et  $Q$  sont tous les deux vrais ou tous les deux faux.

## 3.2 Démonstration d'équivalence par implications

### 3.2.1 Par double implication

D'après la définition précédente, pour montrer l'équivalence ( $P \iff Q$ ), on peut montrer les deux implications ( $P \implies Q$ ) et ( $Q \implies P$ ).

**Exemple** Soient  $a, b, c$  des nombres réels,  $a \neq 0$ . Montrons l'équivalence des deux énoncés suivants :

$P$  :  $ax^2 + bx + c$  a deux racines réelles non nulles de signes contraires ;

$Q$  :  $ac < 0$ .

| Rédaction                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Commentaires                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>– <b>Démontrons</b> (<math>P \implies Q</math>).<br/>Supposons donc <math>P</math>.<br/>Notons <math>x_1</math> et <math>x_2</math> les deux racines réelles du polynôme <math>ax^2 + bx + c</math>.<br/>On sait que</p> $x_1x_2 = \frac{c}{a}.$ <p>On a donc</p> $a^2x_1x_2 = ac.$ <p>Les nombres réels non nuls <math>x_1</math> et <math>x_2</math> étant de signes contraires, leur produit <math>x_1x_2</math> est strictement négatif.<br/><math>a^2 &gt; 0</math>, on en déduit que<br/><math>a^2x_1x_2 &lt; 0</math>, c'est à dire <math>ac &lt; 0</math>.</p> | <p>On a vu au paragraphe 2.3 que pour montrer l'implication (<math>P \implies Q</math>), on peut supposer que <math>P</math> est vrai et montrer que <math>Q</math> l'est aussi.</p> <p>On a bien obtenu <math>Q</math>.</p>           |
| <p>– <b>Démontrons</b> (<math>Q \implies P</math>).<br/>Supposons <math>Q</math>, c'est à dire <math>ac &lt; 0</math>.</p> $\Delta = b^2 - 4ac$ <p>or <math>b^2 \geq 0</math> et <math>ac &lt; 0</math> donc <math>-4ac &gt; 0</math>, d'où</p> $\Delta > 0.$ <p>Donc <math>ax^2 + bx + c</math> admet deux racines réelles distinctes <math>x_1</math> et <math>x_2</math>.</p>                                                                                                                                                                                          | <p>On a établi l'implication (<math>P \implies Q</math>). Il reste à démontrer l'implication (<math>Q \implies P</math>) pour avoir l'équivalence. On suit le même schéma : on suppose <math>Q</math> et on montre <math>P</math>.</p> |

Pour démontrer que deux nombres sont non nuls et de signes contraires, on peut démontrer que leur produit est strictement négatif:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{ac}{a^2}.$$

Or  $ac < 0$  d'où  $x_1x_2 < 0$ . Donc  $x_1$  et  $x_2$  sont des nombres non nuls et de signes contraires.

### 3.2.2 Astuce lorsqu'il y a plus de deux énoncés

On veut établir les équivalences  $(P \iff Q)$ ,  $(Q \iff R)$  et  $(R \iff P)$ . D'après ce qui précède, il faudrait démontrer six implications!

En fait, trois suffisent :  $(P \implies Q)$ ,  $(Q \implies R)$  et  $(R \implies P)$ , comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple** Soient  $A$ ,  $B$  et  $I$  des points du plan. Montrons l'équivalence des énoncés :

$$P: \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0};$$

$$Q: \text{pour tout point } M \text{ du plan, } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI};$$

$$R: \text{il existe un point } M_0 \text{ du plan tel que, } \overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{M_0B} = 2\overrightarrow{M_0I}.$$

#### Démonstration

– **Montrons d'abord l'implication**  $(P \implies Q)$ . On suppose  $P$  :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

Soit  $M$  un point quelconque du plan. On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= 2\overrightarrow{MI}. \end{aligned}$$

– **Montrons l'implication**  $(Q \implies R)$ . Supposons  $Q$ . Donc pour tout point  $M$ ,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

On choisit alors un point  $M_0$ . On a alors :

$$\overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{M_0B} = 2\overrightarrow{M_0I}.$$

– **Montrons enfin l'implication**  $(R \implies P)$ . Supposons  $R$ . Il existe donc  $M_0$  tel que  $\overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{M_0B} = 2\overrightarrow{M_0I}$ . D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{M_0I} + \overrightarrow{IB} &= 2\overrightarrow{M_0I} \\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

**Commentaire** Des implications  $(Q \implies R)$  et  $(R \implies P)$ , on déduit l'implication  $(Q \implies P)$ . Et comme on a établi l'implication  $(P \implies Q)$ , on obtient l'équivalence  $(P \iff Q)$ . Les deux autres équivalences se déduisent de la même manière.

### 3.3 Équivalences successives

On veut démontrer l'équivalence  $(P \iff Q)$ .

Remarquons d'abord que si les équivalences  $(P \iff R)$  et  $(R \iff Q)$  sont vraies, alors l'équivalence  $(P \iff Q)$  est vraie.

**Exemple** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des points deux à deux distincts du plan complexe, d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

On se propose de démontrer que les énoncés suivants sont équivalents :

$P$  : le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  ;

$Q$  :  $\frac{c-a}{b-a}$  est un nombre imaginaire pur.

**Rédaction** La propriété  $P$  signifie que l'angle  $\widehat{BAC}$  est droit.

La propriété  $P$  est donc équivalente à la propriété  $R$  :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Or  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$  est un argument du nombre complexe  $\frac{c-a}{b-a}$ .

Donc la propriété  $R$  est équivalente à la propriété  $S$  :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Or, un nombre complexe non nul a un argument égal à  $\frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$  modulo  $2\pi$  si et seulement si il est imaginaire pur.

Donc la propriété  $S$  est équivalente à la propriété  $Q$  :

$$\frac{c-a}{b-a} \text{ est un nombre imaginaire pur.}$$

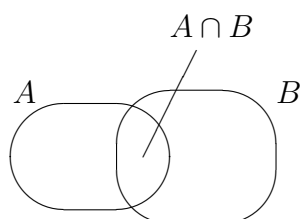
Finalement, on a établi par équivalences successives que  $P$  est équivalent à  $Q$ .

**Commentaire** Pour faire la démonstration, on est amené à trouver des propriétés intermédiaires ( $R$  et  $S$  dans cet exemple) qui permettent une démonstration par équivalences successives.

## 4 Ensembles

### 4.1 Intersection

**Définition**  $A$  et  $B$  étant deux ensembles, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à  $A$  et à  $B$  se note  $A \cap B$ .  
On l'appelle **l'intersection** de  $A$  et de  $B$ .  $A \cap B$  se lit «  $A$  inter  $B$  ».



**Exemple**

$$[-8; 5[ \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

**Comment démontrer l'appartenance à une intersection?**

**Exemple** Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A(1,5)$  et de rayon  $\sqrt{2}$  et la parabole  $P$  d'équation  $y = x^2$ .

Montrer que le point  $B(2,4)$  est élément de l'intersection  $\mathcal{C} \cap P$ .

| Rédaction                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Commentaires                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Pour prouver que le point <math>B</math> est sur le cercle, il suffit de montrer que <math>AB^2 = 2</math>.<br/>Or</p> $\begin{aligned} AB^2 &= (2 - 1)^2 + (4 - 5)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$ <p>donc <math>B \in \mathcal{C}</math>.<br/>D'autre part, les coordonnées de <math>B</math> vérifient l'équation <math>y = x^2</math>, donc <math>B \in P</math>.<br/>Finalement, <math>B \in \mathcal{C} \cap P</math>.</p> | <p>On doit vérifier que <math>B \in \mathcal{C}</math>.</p> <p>Il faut aussi vérifier que <math>B \in P</math>.</p> |

**Remarque** De la définition de l'intersection, il résulte que  $A \cap B = B \cap A$ .

**Cas particuliers** Dans le cas où  $A$  est un sous-ensemble d'un ensemble  $E$ :

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap A = A$
- $A \cap E = A$

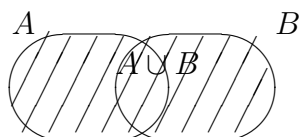
**Définition** On dit que les ensembles  $A$  et  $B$  sont **disjoints** si  $A \cap B = \emptyset$ .

## 4.2 Réunion

**Définition**  $A$  et  $B$  étant deux ensembles, l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  se note  $A \cup B$ . On l'appelle **la réunion** de  $A$  et de  $B$ .  
 $A \cup B$  se lit «  $A$  union  $B$  ».

« être élément de  $A \cup B$  » signifie « être élément de  $A$  ou être élément de  $B$  »

On remarque, d'après la définition, que  $A \cup B = B \cup A$ .



**Exemple**

$$]1; \pi[ \cup ]-1; e[ = ]-1; \pi[.$$

**Comment démontrer l'appartenance à une réunion?** Exemple : reprenons l'exemple du cercle et de la parabole du 4.1. Démontrons que les points  $C(0,6)$  et  $D(-1,1)$  appartiennent à la réunion  $\mathcal{C} \cup P$ .

**Rédaction** Regardons si le point  $C$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  :

$$AC^2 = 2$$

donc  $C$  appartient au cercle, donc il appartient à la réunion  $\mathcal{C} \cup P$ .

On cherche également si  $D$  appartient à  $\mathcal{C}$  :

$$AD^2 = (1 - (-1))^2 + (5 - 1)^2 = 20$$

donc  $D$  n'appartient pas au cercle. On cherche s'il appartient à  $P$  :

$$(-1)^2 = 1$$

donc  $D$  appartient à  $P$ , donc  $D$  appartient à la réunion  $\mathcal{C} \cup P$ .

Cet exemple nous indique la marche à suivre pour démontrer qu'un élément  $x$  appartient à  $A \cup B$ . On distingue deux cas :

- si  $x$  appartient à  $A$ , alors  $x$  appartient à  $A \cup B$  ;
- sinon,  $x$  n'appartient pas à  $A$ . Dans ce cas, pour prouver que  $x$  appartient à  $A \cup B$ , on montre que  $x$  appartient à  $B$

C'est un premier exemple de raisonnement par disjonction de cas, qui sera approfondi au 5.2.

**Cas particuliers** Étant donné un sous-ensemble  $A$  d'un ensemble  $E$ ,

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup E = E$
- $A \cup A = A$

### 4.3 Complémentation

**Définition** Deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  d'un ensemble  $E$  sont **complémentaires** si leur réunion est l'ensemble  $E$  et leur intersection l'ensemble vide.

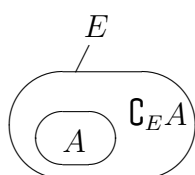
On note  $A = \complement_E B$  et on dit que  $A$  est le complémentaire de  $B$  dans  $E$ . De même, on note  $B = \complement_E A$  et on dit que  $B$  est le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

« Être élément de  $\complement_E A$  » signifie donc « appartenir à  $E$  et ne pas être élément de  $A$  ».

Pour tout  $x \in E$ , on a l'équivalence  $(x \in \complement_E A) \iff (x \notin A)$ .

**Remarque** Pour tout élément  $x$  de  $E$ , deux cas se présentent :

- $x \in A$  et  $x \notin \complement_E A$ .
- $x \in \complement_E A$  et  $x \notin A$ .



**Remarque**  $\complement_E (\complement_E A) = A$ .

$A = \complement_E B \iff B = \complement_E A$ .

**Exemple** On considère l'ensemble  $E$  des cartes d'un jeu de 32 cartes,  $R$  l'ensemble des cartes rouges,  $C$  l'ensemble des cœurs,  $K$  l'ensemble de carreaux,  $T$  l'ensemble des trèfles et  $P$  l'ensemble des piques.

$\complement_E R$  est alors l'ensemble des cartes noires et  $\complement_E C = P \cup K \cup T$ , tandis que  $\complement_R C = K$ .

$\complement_E C$  (complémentaire de  $C$  dans  $E$ ) et  $\complement_R C$  (complémentaire de  $C$  dans  $R$ ) ne désignent pas le même ensemble. Toutefois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence, on peut noter  $\overline{A}$  le complémentaire de  $A$  dans cet ensemble de référence.

**Règle** Soit  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

**Démonstration** Soit  $x \in E$ .

On note  $P$  l'énoncé «  $x \in A$  » et  $Q$  l'énoncé «  $x \in B$  ».

(non  $P$ ) est alors l'énoncé «  $x \notin A$  », c'est-à-dire l'énoncé «  $x \in \overline{A}$  ».

On a l'équivalence  $(\text{non}(P \text{ et } Q)) \iff ((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))$ , ce qui donne

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

De même l'équivalence  $(\text{non}(P \text{ ou } Q)) \iff ((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q))$  montre que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

## 4.4 Partition d'un ensemble

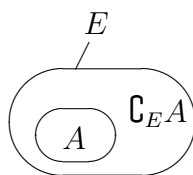
Soit  $E$  un ensemble non vide.

**Définition** Réaliser une **partition** de l'ensemble  $E$ , c'est se donner des sous-ensembles  $A_1, \dots, A_n$  de  $E$  vérifiant les trois conditions :

1. Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_i \neq \emptyset$ .
2. Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .
3.  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ .

### Remarques

1. Des sous-ensembles de  $E$  vérifiant la condition 3. forment un **recouvrement** de  $E$ .
2. Une partition de  $E$  est donc constituée de sous-ensembles non vides de  $E$ , deux à deux disjoints et constituant un recouvrement de  $E$ .
3. Chaque élément  $x$  de  $E$  appartient à un et un seul des sous-ensembles formant la partition.
4. Soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$ , non vide et distinct de  $E$ . Alors  $A$  et  $\complement_E A$  forment une partition de  $E$ .



### Exemple 1.

$$\begin{aligned}
 E &= \mathbb{R} \\
 A_1 &= ]-\infty; -4[ \\
 A_2 &= [-4; 2] \\
 A_3 &= ]2; 100] \\
 A_4 &= ]100; +\infty[
 \end{aligned}$$

Ces sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  sont tous non vides, ils sont deux à deux disjoints et

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \mathbb{R}$$

$A_1, A_2, A_3, A_4$  forment donc une partition de  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 2.** Dans le plan muni d'un repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les sous-ensembles

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{M(x,y) / 2x + 3y - 1 > 0\} \\
 A_2 &= \{M(x,y) / 2x + 3y - 1 = 0\} \\
 A_3 &= \{M(x,y) / 2x + 3y - 1 < 0\}
 \end{aligned}$$

$A_1, A_2, A_3$  forment une partition du plan.

**Exemple 3.**  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_-$  forment un recouvrement de  $\mathbb{R}$  mais ne forment pas une partition de  $\mathbb{R}$ . En effet, ils ne sont pas disjoints puisque 0 appartient à la fois à  $\mathbb{R}_+$  et à  $\mathbb{R}_-$ .

## 4.5 Produit cartésien

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Si  $a$  est un élément de  $A$  et  $b$  un élément de  $B$ , on note  $(a,b)$  le **couple** ayant  $a$  pour premier élément et  $b$  pour second élément.

Cet ordre a une importance, en effet :

- d’une part, il ne faut pas confondre le couple  $(a,b)$  et l’ensemble  $\{a; b\}$ . Par exemple, les points du plan de coordonnées  $(0,1)$  et  $(1,0)$  sont distincts, ce qui montre que les couples  $(0,1)$  et  $(1,0)$  ne sont pas égaux. En revanche, les ensembles  $\{0; 1\}$  et  $\{1; 0\}$  sont égaux ;
- d’autre part, on a l’équivalence

$$(a,b) = (a',b') \iff (a = a' \text{ et } b = b').$$

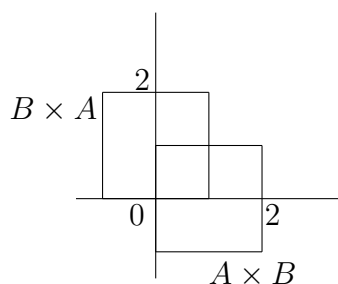
**Définition** L’ensemble des couples formés d’un premier élément pris dans  $A$  et d’un second élément pris dans  $B$  s’appelle le **produit cartésien** de l’ensemble  $A$  par l’ensemble  $B$ . On le note  $A \times B$ .

$$A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\}$$

**Exemple 1.** Si on prend  $A = \{0; 1\}$  et  $B = \{x; y\}$ , alors

$$A \times B = \{(0,x); (1,x); (0,y); (1,y)\}.$$

**Exemple 2.** Si on prend  $A = [0,2]$  et  $B = [-1,1]$ , alors :



On déduit de cet exemple que :

- Lorsque le couple  $(a,b)$  appartient à  $A \times B$ , il se peut que le couple  $(b,a)$  n’y appartienne pas.
- Dans la plupart des cas,  $A \times B \neq B \times A$ .

**Cas particulier** Si  $A = B = \mathbb{R}$ , on obtient le produit cartésien  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , noté  $\mathbb{R}^2$ , ensemble des couples de nombres réels  $(x,y)$ . On utilisera de même la notation  $\mathbb{R}^3$  pour désigner l’ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  des triplets de nombres réels  $(x,y,z)$ .

## 4.6 Inclusion

**Définition** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On dit que  $A$  est **contenu** dans  $B$  (ou que  $A$  est **inclus** dans  $B$ ) et on écrit  $A \subset B$  lorsque tout élément de  $A$  est aussi élément de  $B$ .

Cela signifie qu'il est impossible de trouver un élément de  $A$  qui ne soit pas un élément de  $B$ . Le cas où « être élément de  $A$  » est vrai et « être élément de  $B$  » est faux ne peut se produire.

D'après ce que nous avons vu sur l'implication, cela signifie que  
« être élément de  $A$  » implique « être élément de  $B$  ».

**Comment démontrer une inclusion?** Exemple : soit  $E$  l'ensemble des points  $M$  du plan complexe dont l'affixe  $z$  vérifie  $z^{15} = 1$  et  $\Gamma$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1. Démontrer que  $E \subset \Gamma$ .

| Rédaction                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Commentaires                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Soit <math>M</math> un point quelconque appartenant à <math>E</math>.</p> <p><math>M \in E</math>, donc <math>z^{15} = 1</math>, donc <math> z^{15}  = 1</math>. Or <math> z^{15}  =  z ^{15}</math>, donc <math> z ^{15} = 1</math> et <math> z </math> étant réel, on en déduit que <math> z  = 1</math>, ce qui signifie que <math>M \in \Gamma</math>.</p> | <p>On veut démontrer que tout point <math>M</math> de <math>E</math> appartient à <math>\Gamma</math>. Il faut donc commencer par prendre un point <math>M</math> quelconque et supposer qu'il appartient à <math>E</math>.</p> |

### Exemples remarquables

- Tout ensemble  $A$  vérifie  $A \subset A$ . En effet, pour tout  $x \in A$ ,  $x \in A$ .
- $A$  et  $B$  étant deux parties d'un ensemble  $E$ , on a :

$$\begin{aligned} A \cap B &\subset A; \\ A \cap B &\subset B; \\ A &\subset A \cup B; \\ B &\subset A \cup B. \end{aligned}$$

**Comment démontrer une égalité de deux ensembles?** Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Si  $A \subset B$ , tous les éléments de  $A$  sont éléments de  $B$ .

Si  $B \subset A$ , tous les éléments de  $B$  sont éléments de  $A$ .

Pour montrer que  $A = B$ , on montre la double inclusion  $A \subset B$  et  $B \subset A$ .

**Exemple** Démontrer que les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant la propriété  $P$ :  
pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$   
sont les fonctions linéaires.

On note  $E$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant la propriété  $P$  et  $F$  l'ensemble des fonctions linéaires. Il s'agit de montrer que  $E = F$ .

| Rédaction                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Commentaires                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Soit <math>f</math> une fonction linéaire. Il existe un réel <math>k</math> tel que, pour tout <math>x \in \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = kx</math>.</p> <p>Soient <math>x</math> et <math>y</math> deux réels.</p> $f(x+y) = k(x+y) = kx+ky = f(x)+f(y)$ <p>donc <math>f</math> vérifie la propriété <math>P</math>. D'autre part, <math>f</math> est dérivable sur <math>\mathbb{R}</math>, donc <math>f \in E</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>On va d'abord montrer que <math>F \subset E</math>. Pour cela, on prend un élément quelconque de <math>F</math> et on démontre qu'il appartient à <math>E</math>.</p> |
| <p>Réciproquement, soit <math>f</math> une fonction dérivable sur <math>\mathbb{R}</math> vérifiant la propriété <math>P</math>.</p> <p>En remplaçant <math>x</math> et <math>y</math> par <math>0</math>, on obtient <math>f(0) = 0</math>. Posons <math>k = f'(0)</math>.<br/>Soit <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ <p>or <math>f(x+h) = f(x) + f(h)</math>, donc</p> $\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= f'(0) \\ &= k \end{aligned}$ <p><math>f</math> est la primitive sur <math>\mathbb{R}</math> qui s'annule en <math>0</math> d'une fonction constante donc <math>f</math> est linéaire.</p> | <p>On montre maintenant que <math>E \subset F</math>. Pour cela, on prend un élément quelconque de <math>E</math> et on démontre qu'il appartient à <math>F</math>.</p>  |

## 5 Mise en œuvre de différentes formes de raisonnements

### 5.1 Raisonnement par l'absurde

On veut démontrer un énoncé  $P$ . Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que l'énoncé  $P$  est faux et à aboutir à une contradiction, c'est à dire à un énoncé manifestement faux. On conclut alors que  $P$  est vrai.

**Exemple** Prouver que  $\log 2$  est irrationnel, où  $\log$  est la fonction logarithme décimal.

Supposons que  $\log 2$  est rationnel. Alors il existe  $p$  et  $q$  entiers relatifs tels que  $\log 2 = \frac{p}{q}$ . Comme on a  $0 < \log 2 < 1$ , on peut choisir  $p$  et  $q$  tels que  $0 < p < q$ .

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \log 2 &= \frac{p}{q} \\ \log 2 &= \frac{p}{q} \log 10 \text{ car } \log 10 = 1 \\ q \log 2 &= p \log 10 \\ \log 2^q &= \log 10^p \\ 2^q &= 10^p \\ 2^q &= 2^p 5^p \\ 2^{q-p} &= 5^p \end{aligned}$$

Or  $q - p > 0$  donc  $2^{q-p}$  est un entier pair.  $5^p$ , qui lui est égal, serait donc un entier pair, ce qui est manifestement faux. On en déduit que l'hypothèse  $\log 2$  est rationnel est fautive.

On conclut alors que  $\log 2$  est irrationnel.

## 5.2 Raisonnement par disjonction de cas

Nous allons commencer par trois exemples pour illustrer ce type de raisonnement.

**Exemple 1.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$|x - 1| + |2x - 3| = 6.$$

On rappelle que  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  et  $|x| = -x$  si  $x \leq 0$ .

En utilisant le résultat précédent, on peut compléter le tableau suivant :

| $x$                  | $-\infty$ | 1         | 1,5       | $+\infty$ |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $ 2x - 3 $           |           | $-2x + 3$ | $-2x + 3$ | $2x - 3$  |
| $ x - 1 $            |           | $-x + 1$  | $x - 1$   | $x - 1$   |
| $ 2x - 3  +  x - 1 $ |           | $-3x + 4$ | $-x + 2$  | $3x - 4$  |

Au lieu de travailler directement sur  $\mathbb{R}$ , on va scinder l'étude en trois parties :  $]-\infty; 1]$ ,  $\left]1; \frac{3}{2}\right]$  et  $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ . On est amené à trois résolutions :

- Résoudre dans  $]-\infty; 1]$  l'équation  $-3x + 4 = 6$ . On obtient  $x = -\frac{2}{3}$ , qui est bien dans l'intervalle  $]-\infty; 1]$ .
- Résoudre dans  $\left]1; \frac{3}{2}\right]$  l'équation  $-x + 2 = 6$ . On obtient  $x = -4$ . Mais  $-4$  ne convient pas car il n'appartient pas à l'intervalle  $\left]1; \frac{3}{2}\right]$ .
- Résoudre dans  $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$  l'équation  $3x - 4 = 6$ . On obtient  $x = \frac{10}{3}$  qui est bien dans l'intervalle  $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ .

L'ensemble des solutions de l'équation est formé des différentes solutions obtenues aux trois cas, ce qui donne

$$S = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{10}{3} \right\}.$$

On dit alors qu'on a raisonné par disjonction de cas. On a décomposé  $\mathbb{R}$  en une réunion d'intervalles et on a cherché les solutions sur chacun de ces intervalles.

**Exemple 2.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation

$$\sqrt{2x^2 + 1} > 2x - 4.$$

Remarquons que, quelque soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2x^2 + 1 > 0$ . On en déduit que  $\sqrt{2x^2 + 1}$  est toujours défini.

Au lieu de travailler directement sur  $\mathbb{R}$ , on va scinder l'étude en deux parties, selon le signe de  $2x - 4$ .

Premier cas:  $x < 2$ .

Alors  $2x - 4 < 0$ . L'inéquation est vérifiée puisque  $\sqrt{2x^2 + 1} > 0$ . Tout élément de l'intervalle  $] -\infty; 2[$  est solution.

Second cas:  $x \geq 2$ .

Les deux membres de l'inéquation sont positifs. La fonction carré étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit que l'inéquation est équivalente à

$$\left( \sqrt{2x^2 + 1} \right)^2 > (2x - 4)^2$$

ce qui, après simplification, donne

$$-2x^2 + 16x - 15 > 0.$$

Cette inéquation est vérifiée pour  $x$  dans  $\left] \frac{16 - \sqrt{136}}{4}; \frac{16 + \sqrt{136}}{4} \right[$ .

$\frac{16 - \sqrt{136}}{4} \simeq 1,08$  et  $\frac{16 + \sqrt{136}}{4} \simeq 6,91$ . Le domaine d'étude étant  $[2; +\infty[$ , on en déduit

les solutions de l'inéquation initiale sur  $[2; +\infty[$ : ce sont les éléments de  $\left[ 2; \frac{16 + \sqrt{136}}{4} \right[$ .

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est la réunion des intervalles trouvés dans les deux cas, ce qui donne

$$S = \left] -\infty; \frac{16 + \sqrt{136}}{4} \right[ \cup \left[ -\infty; \frac{8 + \sqrt{34}}{2} \right[.$$

**Exemple 3.** Soit  $a$  un entier relatif. Démontrer que  $a(a^2 - 1)$  est un multiple de 3. Nous raisonnerons à nouveau par disjonction de cas, selon le reste  $r$  de la division (dite euclidienne) de  $a$  par 3.

Premier cas:  $r = 0$ .

Il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a = 3k$ . Donc  $a(a^2 - 1) = 3[k(9k^2 - 1)]$ .

Deuxième cas:  $r = 1$ .

Il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a = 3k + 1$ . Alors

$$\begin{aligned} a(a^2 - 1) &= (3k + 1)(9k^2 + 6k) \\ &= 3(3k + 1)(3k^2 + 2k). \end{aligned}$$

Troisième cas:  $r = 2$ .

Il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a = 3k + 2$ . Alors

$$\begin{aligned} a(a^2 - 1) &= (3k + 2)(9k^2 + 12k + 3) \\ &= 3(3k + 2)(3k^2 + 4k + 1). \end{aligned}$$

Dans chacun des trois cas, il existe un entier relatif  $k'$  tel que  $a(a^2 - 1) = 3k'$ . On a donc démontré, dans les trois cas, que  $a(a^2 - 1)$  est un multiple de 3.

**Définition** Raisonnement par disjonction de cas sur un ensemble  $A$  revient à effectuer une partition de  $A$  et à raisonner sur chacune des parties de cette partition.

**Remarque**: Dans certains cas, il pourra être plus commode d'effectuer un recouvrement de  $A$  plutôt qu'une partition.

**Exercices** : 9 à 14 p. 35.

## 5.3 Raisonnement par récurrence

Rappelons la démarche à suivre lorsque l'on veut démontrer par récurrence une propriété relative à un entier naturel.

La propriété  $P(n)$  à démontrer ayant été mise en évidence, la démonstration par récurrence se déroule en deux étapes suivies d'une conclusion :

1. « Initialisation. » On repère un entier  $n_0$  tel que  $P(n_0)$  est vraie.
2. « Hérédité. » On démontre que, pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a l'implication

$$(P(n) \implies P(n + 1)).$$

Conclusion : des deux points précédents, on déduit que, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $P(n)$  est vraie.

### 5.3.1 Exemple

On sait que la fonction sinus est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire dérivable jusqu'à un ordre quelconque. Démontrons par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ , la dérivée  $n$ -ième de la fonction sinus est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

– **Étape préliminaire** : on met en évidence la propriété à démontrer.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $P(n)$  la propriété à établir :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

– **Initialisation** : on vérifie la propriété  $P(1)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin'(x) = \cos(x)$ . Or  $\sin^{(1)}(x) = \sin'(x)$  et  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ . On a donc

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \sin^{(1)}(x) = \sin\left(x + 1 \times \frac{\pi}{2}\right)$$

ce qui établit la propriété  $P(1)$ .

– **Hérédité** : on considère un entier  $n \geq 1$  et, pour cet entier, on démontre l'implication  $(P(n) \implies P(n+1))$ .

| Rédaction                                                                                                                                                                                                             | Commentaires                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Soit un entier $n \geq 1$ .                                                                                                                                                                                           | On considère donc un entier naturel quelconque $n \geq 1$ .                                                       |
| On suppose que                                                                                                                                                                                                        | On suppose que, <b>pour cet entier</b> , $P(n)$ est vraie. L'hypothèse $P(n)$ est appelé hypothèse de récurrence. |
| pour tout $x \in \mathbb{R}$ , $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$                                                                                                                                  | On démontre alors $P(n+1)$ .                                                                                      |
| D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction dérivée $n$ -ième $\sin^{(n)}$ est composée de la fonction affine $u : x \mapsto x + n\frac{\pi}{2}$ et de la fonction sinus. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ , on a donc |                                                                                                                   |
| $\begin{aligned} \sin^{(n+1)}(x) &= (\sin^{(n)})'(x) \\ &= u'(x) \times \sin'\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$                                                                                           |                                                                                                                   |
| c'est-à-dire                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                   |
| $\sin^{(n+1)}(x) = 1 \times \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$                                                                                                                                                      |                                                                                                                   |
| avec                                                                                                                                                                                                                  | On utilise la formule $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$ vérifiée par tout nombre $\theta$ .           |
| $\begin{aligned} \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$                                              |                                                                                                                   |
| donc finalement                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                   |
| $\sin^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$                                                                                                                                                          |                                                                                                                   |
| Autrement dit, on a établi $P(n+1)$ .                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                   |

– **Conclusion** : On a établi  $P(1)$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'implication  $(P(n) \implies P(n+1))$ . On en déduit que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $P(n)$  est vraie.

### 5.3.2 L'initialisation : une étape essentielle

Dans l'exemple qui suit, on s'intéresse, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , à la propriété  $2^n \leq n!$ , que l'on note  $P(n)$ .

- **Démontrons d'abord que cette propriété est « héréditaire » :** On considère un entier  $n \geq 1$  et, pour cet entier, on démontre l'implication  $(P(n) \implies P(n+1))$ . Pour cela, on suppose  $P(n)$  et on démontre  $P(n+1)$ .

Par hypothèse de récurrence, on a  $2^n \leq n!$ . De plus,  $1 \leq n$  donc  $2 \leq n+1$ . On multiplie membre à membre les inégalités  $2^n \leq n!$  et  $2 \leq n+1$  (qui portent sur des nombres tous positifs). On obtient  $2^n \times 2 \leq n! \times (n+1)$ , c'est-à-dire  $2^{n+1} \leq (n+1)!$ , ce qui établit  $P(n+1)$ .

- **On se propose maintenant de déterminer les entiers  $n \geq 1$  tels que  $2^n \leq n!$ .**

D'après ce qui précède, on peut écrire les implications suivantes :

$(P(1) \implies P(2))$ ,  $(P(2) \implies P(3))$ ,  $(P(3) \implies P(4))$ ,  $(P(4) \implies P(5)) \dots$

Mais rappelons que le fait que l'implication  $(P(1) \implies P(2))$  soit vraie ne prouve pas que  $P(1)$  est vraie.

On est donc obligé de tester la propriété  $P(1)$ . Et dans cet exemple,  $P(1)$  est fausse. En effet, on a  $2^1 > 1!$ .

Mais le fait que l'implication  $(P(1) \implies P(2))$  soit vraie et que  $P(1)$  soit fausse n'implique pas que  $P(2)$  est fausse. On est obligé de tester la propriété  $P(2)$ . Elle est fausse, en effet,  $2^2 > 2!$ .

On est donc amené à tester la propriété  $P(3)$ . Elle est fausse, car  $2^3 > 3!$ .

On espère trouver un « premier » entier  $n_0$  tel que  $P(n_0)$  soit vraie. Sinon, on ne peut pas utiliser le fait que la propriété est héréditaire. C'est la phase « initialisation » de la démonstration par récurrence.

Dans cet exemple,  $n_0 = 4$ . En effet,  $2^4 \leq 4!$  donc  $P(4)$  est vraie. On peut alors utiliser l'hérédité de la propriété :

- puisque  $P(4)$  est vraie, l'implication  $(P(4) \implies P(5))$  prouve que  $P(5)$  est vraie ;
- puisque  $P(5)$  est vraie, l'implication  $(P(5) \implies P(6))$  prouve que  $P(6)$  est vraie, etc.

Ces implications successives permettent de prouver que, pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $P(n)$  est vraie.

Dans cet exercice, on a démontré par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $2^n \leq n!$ .

La propriété est héréditaire à partir du rang 1, mais on ne peut faire « fonctionner » cette hérédité qu'à partir d'un rang  $n_0$  ( $n_0 \geq 1$ ) où la propriété est vérifiée. On comprend bien le rôle essentiel et complémentaire des deux étapes : « initialisation » et « hérédité » d'une démonstration par récurrence.

### 5.3.3 L'hérédité : une rédaction à soigner

Dans l'exemple qui suit, on considère une suite  $(u_n)$  définie par la donnée de son premier terme  $u_0 = 1$  et de la relation, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$ . On a demandé aux élèves de démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a  $u_n = n + 1$ .

Voici un extrait de copie :

Je réalise une démonstration par récurrence.

- *Initialisation* : la propriété est vraie à l'ordre 0. En effet, pour  $n = 0$ ,  $u_0 = 1 = 0 + 1$ .
- *Hérédité* : on suppose que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a  $u_n = n + 1$ .

On a alors

$$u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8 = 10(n+1) - 9n - 8 = n + 2$$

ce qui établit la propriété à l'ordre  $n + 1$ .

- *Conclusion* : on a démontré par récurrence que la propriété  $u_n = n + 1$  est vraie pour tout entier  $n \geq 0$ .

L'élève fait une erreur grave de logique dans la partie hérédité, en supposant la propriété vraie pour tout entier  $n$ , alors que c'est justement ce qu'il faut démontrer ! Il s'agit en fait d'établir que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a l'implication  $(P(n) \implies P(n+1))$ . Pour cela, il faut suivre les consignes successives suivantes :

1. Considérer un entier  $n \geq 0$  (quelconque).
2. Supposer que la propriété est vérifiée par cet entier  $n$  (l'hypothèse de récurrence ne porte que sur l'entier  $n$  considéré).
3. Démontrer alors que la propriété est vérifiée par l'entier suivant, à savoir  $n + 1$ .

La rédaction aurait donc dû être : « Soit un entier  $n \geq 0$ . On suppose que  $u_n = n + 1$ . On démontre alors que  $u_{n+1} = (n + 1) + 1$ . »

### 5.3.4 Récurrence ou pas ?

Dans l'exemple qui suit, pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $S_n$  la somme des  $n$  premiers entiers naturels non nuls :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

On a demandé à un élève de démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Voici l'extrait de sa copie :

Je réalise une démonstration par récurrence.

- *Initialisation* : la propriété est vraie à l'ordre 1. En effet, pour  $n = 1$ ,  $S_1 = 1$  et  $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ .

- *Hérédité* : Soit un entier  $n \geq 1$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ .

On a alors

$$\begin{cases} S_{n+1} = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) \\ S_{n+1} = (n+1) + n + \dots + 2 + 1 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$2S_{n+1} = (n+2) + (n+2) + \dots + (n+2) + (n+2).$$

Cette somme comportant  $n + 1$  termes, on obtient

$$2S_{n+1} = (n + 1)(n + 2)$$

c'est-à-dire

$$S_{n+1} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

ce qui établit la propriété à l'ordre  $n + 1$ .

– Conclusion : on a démontré par récurrence que la propriété

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

est vraie pour tout entier  $n \geq 1$ .

L'élève est persuadé de faire une démonstration par récurrence. En fait, ce n'en est pas une. En effet, il établit que la propriété est vraie au rang  $n + 1$  directement, c'est-à-dire sans utiliser l'hypothèse de récurrence. Les solutions ci-après montrent la différence entre une démonstration par récurrence, qui nécessite une étape d'initialisation et une étape d'hérédité, et une démonstration qui se fait directement en une seule étape.

### Solution utilisant une démonstration par récurrence

– Initialisation : la propriété est vraie à l'ordre 1. En effet, pour  $n = 1$ ,  $S_1 = 1$  et  $\frac{1(1 + 1)}{2} = 1$ .

– Hérédité : Soit un entier  $n \geq 1$ .

On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

On a

$$S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = S_n + (n + 1).$$

On obtient donc

$$S_{n+1} = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)$$

c'est-à-dire

$$S_{n+1} = (n + 1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right)$$

ou encore

$$S_{n+1} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

ce qui établit la propriété à l'ordre  $n + 1$ .

– Conclusion : on a démontré par récurrence que la propriété

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

est vraie pour tout entier  $n \geq 1$ .

**Solution utilisant une démonstration directe** Soit un entier  $n \geq 1$ . On a

$$\begin{cases} S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1).$$

Cette somme comportant  $n$  termes, on obtient

$$2S_n = n(n+1)$$

c'est-à-dire

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cet exemple montre que, parfois, une démonstration directe est plus simple qu'une démonstration par récurrence.

En revanche, dans l'exemple du 5.3.1, il semble difficile de calculer directement la dérivée  $n$ -ième de la fonction sinus sans connaître la dérivée précédente, d'ordre  $n-1$ . Le recours à une démonstration par récurrence s'imposait.

### 5.3.5 Choix de la propriété à démontrer : quelques exemples plus difficiles

Dans les exemples précédents, l'hérédité consistait à établir, à partir d'un certain rang  $n_0$ , l'implication  $(P(n) \implies P(n+1))$ . Parfois, le passage du rang  $n$  au rang  $n+1$  s'avère difficile. Il est alors nécessaire de modifier la propriété  $P(n)$ .

**Exemple 1.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par la donnée de son premier terme  $u_0 = 1$  et de la relation, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ .

On se propose de démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$u_n \leq 2^n.$$

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note  $P(n)$  la propriété à établir, à savoir  $u_n \leq 2^n$ .

– Dans un premier temps, essayons de démontrer l'hérédité de la propriété  $P$ .

On considère un entier  $n \geq 0$ .

On suppose  $P(n)$ , c'est-à-dire  $u_n \leq 2^n$ . On essaye alors de démontrer  $P(n+1)$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ .

Ayant  $u_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ , on voit bien que l'hypothèse  $u_n \leq 2^n$  n'est pas suffisante pour établir  $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ . Il serait préférable que l'hypothèse porte sur les termes  $u_0, u_1, \dots, u_n$ . Ceci nous amène à modifier la propriété que nous allons établir par récurrence.

– Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note  $Q(n)$  la propriété «  $P(0)$  et  $P(1)$  ... et  $P(n)$  ».

– Initialisation : on vérifie  $Q(0)$ , c'est-à-dire  $P(0)$ . On a  $u_0 = 1$ , donc  $u_0 \leq 2^0$ .

- Hérité : on considère un entier  $n \geq 0$ . On suppose que  $Q(n)$  est vraie. Autrement dit,  $P(0), P(1) \dots$  et  $P(n)$  sont vraies.

On démontre alors que  $Q(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $P(0), P(1) \dots P(n)$  et  $P(n+1)$  sont vraies. En fait, d'après l'hypothèse de récurrence,  $P(0), P(1) \dots P(n)$  sont vraies. Pour établir  $Q(n+1)$ , il suffit d'établir  $P(n+1)$ .

L'hypothèse de récurrence est formée des inégalités :

$$u_0 \leq 2^0, u_1 \leq 2^1, u_2 \leq 2^2 \dots u_n \leq 2^n.$$

En additionnant membre à membre ces  $n+1$  inégalités, de même sens, on obtient

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$$

donc

$$u_{n+1} \leq \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

ou encore

$$u_{n+1} \leq 2^{n+1} - 1.$$

De cette dernière inégalité, on déduit

$$u_{n+1} \leq 2^{n+1}$$

ce qui établit  $P(n+1)$  et donc  $Q(n+1)$ .

- Conclusion : ayant établi  $Q(0)$  et, pour tout entier  $n \geq 0$ , l'implication ( $Q(n) \implies Q(n+1)$ ), on a donc démontré par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $Q(n)$  est vraie.

Or  $Q(n)$  est la propriété «  $P(0)$  et  $P(1) \dots$  et  $P(n)$  ». On a donc ( $Q(n) \implies P(n)$ ) et,  $Q(n)$  étant vraie, on en déduit que  $P(n)$  l'est aussi.

Finalement, on a démontré que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n \leq 2^n$ .

**Exemple 2.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par la donnée des deux premiers termes  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et de la relation, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}$ .

On se propose de démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a  $u_n = \frac{3^n - 1}{2}$ .

Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $P(n)$  la propriété à établir, à savoir  $u_n = \frac{3^n - 1}{2}$ .

La relation  $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}$  montre qu'en supposant la propriété vraie aux rangs  $n-1$  et  $n$ , on pourra la démontrer au rang  $n+1$ , à condition toutefois que l'entier naturel  $n$  soit supérieur ou égal à 1 (à cause de l'indice  $n-1$  qui doit être positif).

On introduit donc, pour tout entier  $n \geq 1$ , la propriété «  $P(n-1)$  et  $P(n)$  » notée  $R(n)$ . On démontre par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $R(n)$  est vraie.

- Initialisation : on vérifie  $R(1)$ , c'est-à-dire  $P(0)$  et  $P(1)$ .

On a  $u_0 = 0$  donc  $u_0 = \frac{3^0 - 1}{2}$ , ce qui établit  $P(0)$ .

On vérifie également  $P(1)$ . On a  $u_1 = 1$ , donc  $u_1 = \frac{3^1 - 1}{2}$ .

– Hérité : on considère un entier  $n \geq 1$ .

On suppose que  $R(n)$  est vraie, c'est-à-dire que  $P(n-1)$  et  $P(n)$  sont vraies.

On démontre alors que  $R(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $P(n)$  et  $P(n+1)$  sont vraies.

En fait, d'après l'hypothèse de récurrence,  $P(n)$  est vraie. Ainsi, pour établir  $R(n+1)$ , il suffit d'établir  $P(n+1)$ .

L'hypothèse de récurrence est formée des deux égalités :

$$u_{n-1} = \frac{3^{n-1} - 1}{2} \text{ et } u_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

On en déduit que

$$u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1} = 4 \left( \frac{3^n - 1}{2} \right) - 3 \left( \frac{3^{n-1} - 1}{2} \right)$$

c'est-à-dire, après calculs,

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

ce qui établit  $P(n+1)$  donc aussi  $R(n+1)$ .

– Conclusion : ayant établi  $R(1)$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'implication  $(R(n) \implies R(n+1))$ , on a donc démontré par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $R(n)$  est vraie.

Or,  $R(n)$  est la propriété «  $P(n-1)$  et  $P(n)$  ». On a donc  $(R(n) \implies P(n))$  et,  $R(n)$  étant vraie, on en déduit que  $P(n)$  l'est aussi. On a donc démontré que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $P(n)$  est vraie.

Or, on a vu que  $P(0)$  est vraie. Finalement, on a démontré que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$u_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

**Exercices :** 15 et 16 p. 36.

## 6 Exercices

### 6.1 Énoncés

**Exercice 1** *Considérons une réunion d'amis autour d'un buffet. Notons  $G$  l'ensemble des amis et  $P$  l'ensemble des plats proposés. Associer les phrases mathématiques 1, 2, 3, 4, 5, 6 aux phrases en Français a, b, c, d, e, f :*

1. Pour tout  $x \in G$ , pour tout  $p \in P$ ,  $x$  mange  $p$ .
2. Il existe  $x \in G$  tel que pour tout  $p \in P$ ,  $x$  mange  $p$ .
3. Pour tout  $x \in G$ , il existe  $p \in P$  tel que  $x$  mange  $p$ .
4. Pour tout  $p \in P$ , il existe  $x \in G$  tel que  $x$  mange  $p$ .
5. Il existe  $p \in P$  tel que pour tout  $x \in G$ ,  $x$  mange  $p$ .
6. Il existe  $p \in P$  et il existe  $x \in G$  tel que  $x$  mange  $p$ .

- a. Quelqu'un goûte à tous les plats.
- b. Tous les plats sont entamés.
- c. Chacun goûte à chaque plat.
- d. Il y a au moins une personne qui ne jeûne pas.
- e. Personne ne jeûne.
- f. Il y a un plat qui fait l'unanimité.

**Exercice 2** Parmi les phrases suivantes, quelles sont celles qui signifient que  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$  ?

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = c$ .
2. Il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$ .
3. Il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = c$ .
4. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(0)$ .
5. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = f(y)$ .
6. Il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(y)$ .
7. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+1) = f(x)$ .
8. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(y)$ .
9. Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(y)$ .

**Exercice 3** Déterminer l'ensemble des nombres réels  $x$  tels que l'on ait :

1.  $|x+2| \leq 3$  et  $x > 0$  ;
2.  $|x+2| \leq 3$  ou  $x > 0$ .

**Exercice 4** Déterminer l'ensemble des nombres réels  $x$  tels que l'on ait :

$$x^4 - 3x^2 + x + 1 = 0 \text{ et } x^2 - 5x + 6 = 0.$$

**Exercice 5** Trouver la solution imaginaire pure de l'équation

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0.$$

**Exercice 6** Étant donnée une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , on considère les énoncés suivants :

$P$  :  $f$  est majorée par 2, c'est-à-dire pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq 2$  ;

$Q$  :  $f$  est minorée par  $-1$ .

Indiquer, parmi les fonctions suivantes, celles qui vérifient  $P$ ,  $Q$ , ( $P$  et  $Q$ ) :

1.  $f(x) = 3 \sin(x) - 1$  ;
2.  $f(x) = \frac{2e^x + 2}{e^x}$  ;
3.  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  ;
4.  $f(x) = x - E(x)$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

**Exercice 7** On considère l'implication suivante, vraie dans  $\mathbb{R}$  :

$$(x \geq 1) \implies (x^2 \geq 1) \tag{5}$$

Écrire des formulations de cet énoncé utilisant :

1. Si ... alors ...

2. Pour que ... il suffit ...
3. Pour que ... il est nécessaire que ...

L'implication réciproque de (5) est-elle vraie ?

**Exercice 8** L'énoncé suivant est un théorème admis en classe de première : étant donné  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  un élément de  $I$ , «  $f$  admet un extremum en  $x_0$  » implique «  $f'(x_0) = 0$  ».

Écrire des formulations de cet énoncé utilisant :

1. Si ... alors ...
2. Pour que ... il suffit ...
3. Pour que ... il est nécessaire que ...

L'implication réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 9**  $A$ ,  $B$  et  $C$  désignent des parties d'un ensemble  $E$ .

1. Démontrer l'équivalence  $(A \subset B) \iff (A \cap B = A)$ .

Indication : on démontrera successivement les deux implications.

- On supposera que  $A \subset B$  et on montrera que  $A \cap B = A$ . Pour cela, on justifiera les deux inclusions  $A \cap B \subset A$  et  $A \subset A \cap B$ .
- On supposera que  $A \cap B = A$  et on démontrera que  $A \subset B$ .

2. Démontrer l'équivalence  $(A \subset B) \iff (A \cup B = B)$ .

**Exercice 10**  $E$  est un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On note  $A \setminus B$  le sous-ensemble de  $E$  formé des éléments qui appartiennent à  $A$  et n'appartiennent pas à  $B$ . Autrement dit :

$$A \setminus B = A \cap \complement_E B.$$

1. Montrer que

$$A \setminus B = \complement_A (A \cap B).$$

2. Dans le cas où  $A \setminus B$  et  $B$  sont non vides, montrer que  $A \setminus B$  et  $B$  forment une partition de  $A \cup B$ .

**Exercice 11** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\sqrt{x-1} \geq x-4$ .

**Exercice 12** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 2x - 3$ .

**Exercice 13** Dans le plan muni d'un repère, déterminer et représenter l'ensemble des points  $M(x,y)$  dont les coordonnées vérifient  $|x| + |y-1| = 2$ .

**Exercice 14**  $A$ ,  $B$  et  $C$  désignent des parties d'un ensemble  $E$ . Démontrer l'implication

$$(A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \implies B \subset C.$$

Indications : on supposera que  $(A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C)$ . Pour montrer que  $B \subset C$ , on prendra un élément  $x$  quelconque de  $B$ . On démontrera qu'il appartient à  $C$  dans chacun des deux cas  $x \in A$  et  $x \notin A$ .

**Exercice 15** Soit  $x$  un nombre réel positif ou nul. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a l'inégalité  $(1+x)^n \geq 1+nx$  par les trois méthodes suivantes :

1. En utilisant une démonstration par récurrence.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton.
3. En utilisant les variations d'une fonction auxiliaire bien choisie.

**Exercice 16** On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] -1; +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(x+1).$$

Démontrer que la fonction  $f$  est indéfiniment dérivable sur l'intervalle  $] -1; +\infty[$  et déterminer, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'expression de sa dérivée  $n$ -ième.

## 6.2 Corrections

**Exercice 1** Réponses : 1c ; 2a ; 3e ; 4b ; 5f ; 6d.

- 1 : la phrase c est synonyme de « toutes les personnes goûtent à tous les plats. »
- 2 et 4 diffèrent par l'ordre des quantificateurs.
  - Dans 2, on introduit  $x$  avant  $p$ , donc la personne  $x$  est la même pour tous les plats  $p$  : elle goûte à tous les plats.
  - Dans 4, on introduit  $p$  avant  $x$ , donc la personne  $x$  qui mange le plat  $p$  dépend de  $p$  : tous les plats sont entamés, mais par des personnes qui peuvent être différentes.
- 3 et 5 diffèrent par l'ordre des quantificateurs.
  - Dans 5, on introduit  $p$  avant  $x$ , donc le plat  $p$  est le même pour toutes les personnes  $x$  : il fait l'unanimité !
  - Dans 3, on introduit  $x$  avant  $p$ , donc le plat mangé dépend de la personne  $x$  qui le mange, mais toutes les personnes  $x$  mangent un plat : aucune ne jeûne.
- 6 : les deux quantificateurs étant identiques, leur ordre n'a aucune importance. La phrase 6 revient à « il existe  $x \in G$  et il existe  $p \in P$  tel que  $x$  mange  $p$  », c'est-à-dire : « il existe au moins une personne qui mange quelque chose. »

**Exercice 2** Réponses : 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9.

1. Dans cette phrase, pour chaque nombre  $x$ , on peut trouver  $c$  tel que  $f(x) = c$ .  $c$  peut donc dépendre de  $x$ . La propriété 1. est vérifiée par toutes les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .
2. Au contraire, ici,  $c$  est introduit avant  $x$  et est donc le même pour tous les  $x$  : la fonction est constante.
3. Les phrases 2. et 3. sont les mêmes. Changer le nom d'une variable ne modifie pas la propriété énoncée. On dit que les variables  $x$  et  $t$  sont muettes.
4. Posons  $c = f(0)$ .  $f$  est la fonction constante qui à tout  $x$  associe le nombre réel  $c$ .
5. De même qu'au 1., la propriété 5. est vérifiée par toute fonction définie sur  $\mathbb{R}$  : pour chaque nombre  $x$ , on peut choisir  $y = x$ .
6. Prenons un nombre réel  $y$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(y)$ . Posons  $c = f(y)$ .  $f$  est la fonction constante qui à  $x$  associe le nombre réel  $c$ .

7. La propriété dit que la fonction  $f$  est périodique et a pour période 1. C'est le cas, par exemple, de la fonction  $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$  et cette fonction n'est pas constante, puisque  $f(0) = 0$  et  $f(\frac{1}{4}) = 1$ . Il faut veiller à ne pas confondre la définition d'une fonction constante avec celle d'une suite constante.
8. En particulier pour  $y = 0$ , on retrouve 4.
9. Les quantificateurs sont identiques, leur ordre n'a pas d'importance, donc les phrases 8 et 9 signifient la même chose.

### Exercice 3

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'énoncé

$$(|x + 2| \leq 3 \text{ et } x > 0)$$

signifie

$$(-3 \leq x + 2 \leq 3 \text{ et } x > 0)$$

signifie

$$(-5 \leq x \leq 1 \text{ et } x > 0)$$

signifie

$$0 < x \leq 1.$$

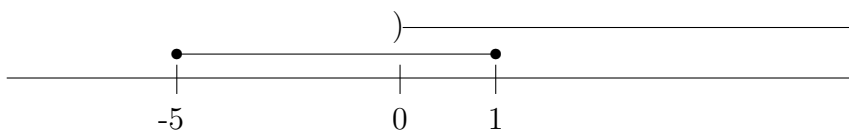
L'ensemble cherché est  $]0; 1]$ .

2. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , l'énoncé

$$(|x + 2| \leq 3 \text{ ou } x > 0)$$

signifie

$$(-5 \leq x \leq 1 \text{ ou } x > 0)$$



Donc l'ensemble cherché est  $[-5; +\infty[$ .

### Exercice 4

On doit trouver les solutions communes aux équations

$$x^4 - 3x^2 + x + 1 = 0 \text{ et } x^2 - 5x + 6 = 0.$$

On résout la plus simple des deux,  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , dont les racines sont 2 et 3.

$$2^4 - 3 \times 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$3^4 - 3 \times 3^2 + 3 + 1 = 58$$

Ni 2 ni 3 ne sont solutions de  $x^4 - 3x^2 + x + 1 = 0$ , donc  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

(L'erreur à ne pas commettre serait de tenter de résoudre l'équation  $x^4 - 3x^2 + x + 1 = 0$  en premier.)

**Exercice 5** Cherchons cette solution sous la forme  $z = yi$  où  $y$  est réel.  
 $yi$  est solution de l'équation

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$$

si et seulement si

$$(yi)^3 - (3 + 4i)(yi)^2 - 6(3 - 2i)(yi) + 72i = 0.$$

En développant cette expression, on obtient :

$$3y^2 - 12y + (-y^3 + 4y^2 - 18y + 72)i = 0$$

ce qui est équivalent à

$$3y^2 - 12y = 0 \text{ et } -y^3 + 4y^2 - 18y + 72 = 0.$$

On résout la plus simple de ces deux équations, ici la première. Ses solutions sont 0 et 4.

On ne cherchera pas à résoudre la seconde : on cherche si 0 ou 4 est solution de cette équation.

0 n'est pas solution de cette seconde équation ( $72 \neq 0$ ).

$$-4^3 + 4 \times 4^2 - 18 \times 4 + 72 = 0$$

4 est solution de la seconde équation, donc  $4i$  est solution de

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0.$$

### Exercice 6

1. Soit  $x$  un réel quelconque. Comme

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

on a

$$-4 \leq f(x) \leq 2$$

donc  $f$  vérifie  $P$ .

Par ailleurs, il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(u_0) < -1$ . Par exemple,  $u_0 = -\frac{\pi}{2}$ . Donc  $f$  ne vérifie pas  $Q$ .

Il en résulte que  $f$  ne vérifie pas ( $P$  et  $Q$ ).

2. Soit  $x$  un réel quelconque.

$$f(x) = 2 + \frac{2}{e^x}.$$

Comme  $-1 < 2$ ,  $f$  vérifie  $Q$ .

$2 < f(x)$  donc  $f$  ne vérifie pas  $P$ .

$f$  ne vérifie pas ( $P$  et  $Q$ ).

3. Soit  $x$  un réel quelconque.

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1.$$

$1 \leq f(x)$ , *a fortiori*  $f(x) \geq -1$ , d'où  $f$  vérifie  $Q$ .

$f$  ne vérifie pas  $P$ . En effet, par exemple,  $f(4) > 2$ .

Donc  $f$  ne vérifie pas ( $P$  et  $Q$ ).

4. Par définition, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

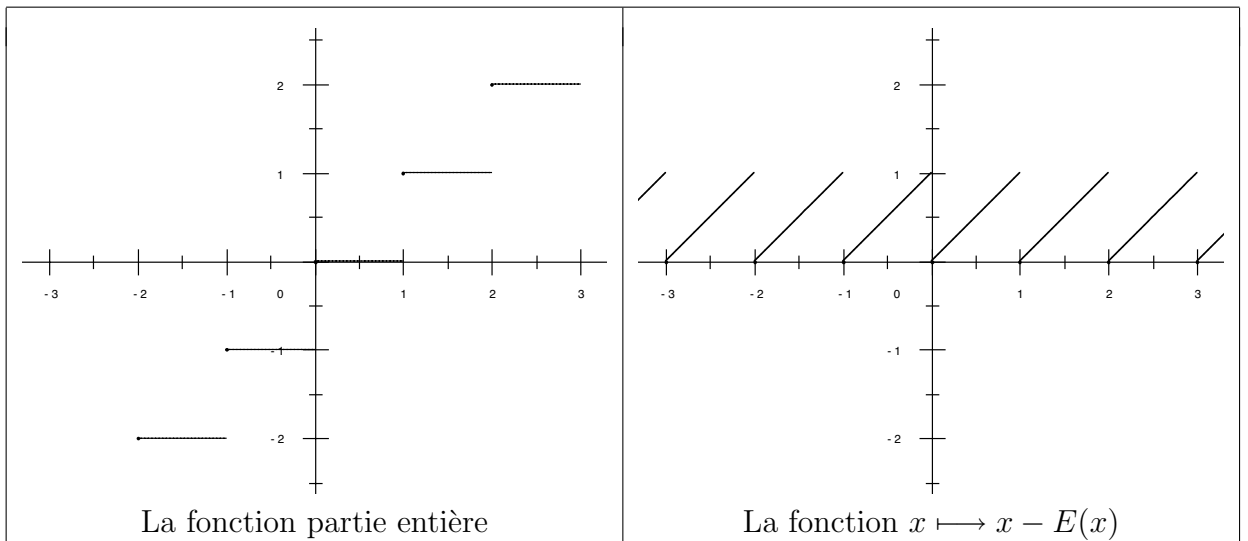
c'est-à-dire

$$0 \leq x - E(x) < 1.$$

Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$0 \leq f(x) < 1.$$

Donc  $f$  vérifie ( $P$  et  $Q$ ).



**Exercice 7** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

1. Si  $(x \geq 1)$ , alors  $(x^2 \geq 1)$ .
2. Pour que  $(x^2 \geq 1)$ , il suffit que  $(x \geq 1)$ .
3. Pour que  $(x \geq 1)$ , il est nécessaire que  $(x^2 \geq 1)$ .

L'implication réciproque de (5) est fausse dans  $\mathbb{R}$ .

Notons  $P$  l'énoncé  $(x \geq 1)$  et  $Q$  l'énoncé  $(x^2 \geq 1)$ .

$x_0 = -1$  vérifie l'énoncé  $Q$  mais ne vérifie pas l'énoncé  $P$ .

Donc  $Q \implies P$  est fausse.

**Exercice 8**

1. Si  $f$  admet un extremum en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .
2. Pour que  $f'(x_0) = 0$ , il suffit que  $f$  admette un extremum en  $x_0$ .
3. Pour que  $f$  admette un extremum en  $x_0$ , il est nécessaire que  $f'(x_0) = 0$ .

L'implication réciproque est : «  $f'(x_0) = 0$  » implique «  $f$  admet un extremum en  $x_0$  ». Cette implication est fausse : choisissons par exemple pour  $f$  la fonction cube et pour  $x_0$  le réel 0. On a  $f'(x_0) = 3 \times 0^2 = 0$ . L'énoncé «  $f'(x_0) = 0$  » est vrai et l'énoncé «  $f$  admet un extremum en  $x_0$  » est faux.

### Exercice 9

1. On suppose que  $A \subset B$ . Montrons que  $A \cap B = A$ , c'est-à-dire  $A \subset A \cap B$  et  $A \cap B \subset A$ .

- Soit  $x \in A$ . L'inclusion  $A \subset B$  prouve que  $x \in B$  et donc que  $x \in A \cap B$ . On en déduit que  $A \subset A \cap B$ .
- D'autre part, les éléments de  $A \cap B$  sont les éléments communs à  $A$  et  $B$ , en particulier  $A \cap B \subset A$ .
- Finalement,  $A = A \cap B$ .

Réciproquement, on suppose que  $A \cap B = A$ . Montrons que  $A \subset B$ .

Soit  $x \in A$ . Prouvons que  $x \in B$ .

L'égalité  $A = A \cap B$  montre que  $x \in A \cap B$ , c'est-à-dire ( $x \in A$  et  $x \in B$ ). On a donc  $x \in B$ .

On a démontré que  $A \subset B$ .

2. On suppose que  $A \subset B$ . Montrons que  $A \cup B = B$ , c'est-à-dire  $A \cup B \subset B$  et  $B \subset A \cup B$ .

- Soit  $x \in A \cup B$ . Prouvons que  $x \in B$ .  
On a ( $x \in A$  ou  $x \in B$ ).  
Premier cas:  $x \in A$ .  
L'inclusion  $A \subset B$  impose alors  $x \in B$ .  
Second cas:  $x \notin A$ .  
Comme  $x \in A \cup B$ , alors  $x \in B$ .  
Dans tous les cas,  $x \in B$ .  
On a démontré que  $A \cup B \subset B$ .
- Les éléments de  $A \cup B$  sont ceux qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$ . On a donc  $B \subset A \cup B$ .
- Finalement,  $A \cup B = B$ .

Réciproquement, on suppose que  $A \cup B = B$ . Montrons que  $A \subset B$ .

Soit  $x \in A$ . Dans ce cas,  $x \in A \cup B$ , c'est-à-dire  $x \in B$ .

On a montré que  $A \subset B$ .

**Exercice 10** Montrons que  $A \setminus B \subset \complement_A(A \cap B)$  et  $\complement_A(A \cap B) \subset A \setminus B$ .

1. - Soit  $x \in A \setminus B$ . Prouvons que  $x \in \complement_A(A \cap B)$ .  
Puisque  $x \in A \setminus B$ , on peut écrire que  $x \in A$  et  $x \notin B$ .  
Le fait que  $x \notin B$  entraîne que  $x \notin A \cap B$ .  
Finalement,  $x \in A$  et  $x \notin A \cap B$ , c'est-à-dire  $x \in \complement_A(A \cap B)$ .
- Soit  $x \in \complement_A(A \cap B)$ . Prouvons que  $x \in A \setminus B$ .  
Puisque  $x \in \complement_A(A \cap B)$ , alors  $x \in A$  et  $x \notin A \cap B$ .  
Montrons par l'absurde que  $x \notin B$ . Pour cela, supposons que  $x \in B$ .  
Alors ( $x \in A$  et  $x \in B$ ), donc  $x \in A \cap B$ , ce qui est contradictoire. On en déduit que  $x \notin B$ .  
Or  $x \in A$ , donc  $x \in A \setminus B$ .

2. On suppose que  $A \setminus B$  et  $B$  sont non vides.

On doit montrer d'une part que  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$  et d'autre part que  $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ .

– Montrons par l'absurde que  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ . Pour cela, supposons qu'il existe  $x \in (A \setminus B) \cap B$ . Alors  $x \in A \setminus B$  et  $x \in B$ , c'est-à-dire

$$x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \in B,$$

ce qui est impossible.

Finalement, un tel  $x$  n'existe pas, donc

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset.$$

– Prouvons que  $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ .

On procède par double inclusion, c'est-à-dire que l'on montre que

$$(A \setminus B) \cup B \subset A \cup B \text{ et } A \cup B \subset (A \setminus B) \cup B.$$

L'inclusion  $A \setminus B \subset A$  implique que  $(A \setminus B) \cup B \subset A \cup B$ .

Soit  $x \in A \cup B$ . Alors  $(x \in A \text{ ou } x \in B)$ . On procède par disjonction de cas :

Premier cas :  $x \in B$ . Alors  $x \in (A \setminus B) \cup B$ .

Second cas :  $x \notin B$ . Alors  $x \in A$ , c'est-à-dire  $x \in A \setminus B$ , a fortiori  $x \in (A \setminus B) \cup B$ .

On a établi l'inclusion  $A \cup B \subset (A \setminus B) \cup B$  et par suite l'égalité entre ces deux ensembles.

**Exercice 11**  $\sqrt{x-1}$  existe pour  $x \in [1; +\infty[$ . En conséquence, l'étude de l'inéquation se fera sur  $[1; +\infty[$ .

Pour  $x \in [1; +\infty[$ ,  $\sqrt{x-1} \geq 0$ .

Procédons par disjonction de cas sur  $[1; +\infty[$  :

Premier cas :  $1 \leq x < 4$ .

Alors  $x - 4 < 0$ . L'inéquation est vérifiée, puisque  $\sqrt{x-1} \geq 0$ .

Tout élément de l'intervalle  $[1; 4[$  est solution.

Second cas :  $x \geq 4$ .

Les deux membres de l'inéquation sont positifs. La fonction carré étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit que l'inéquation est équivalente à

$$(\sqrt{x-1})^2 \geq (x-4)^2$$

ce qui, après simplification, donne

$$-x^2 + 9x - 17 \geq 0.$$

Cette inéquation est vérifiée pour  $x$  dans  $\left[ \frac{9 - \sqrt{13}}{2}; \frac{9 + \sqrt{13}}{2} \right]$ .

Le domaine d'étude dans ce cas étant  $[4; +\infty[$ , on en déduit que les solutions sur  $[4; +\infty[$  sont les éléments de  $\left[ 4; \frac{9 + \sqrt{13}}{2} \right]$ .

Finalement, l'ensemble des solutions est  $\left[ 1; \frac{9 + \sqrt{13}}{2} \right]$ .

**Exercice 12** Pour que  $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$  soit défini, il faut que  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ .

$x^2 - 5x + 6$  est un polynôme du second degré, de racines 2 et 3. Le domaine de définition est donc

$$D = ]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[.$$

On va scinder l'étude en deux parties, selon le signe de  $2x - 3$ .

Premier cas:  $x \in D$  et  $x < \frac{3}{2}$ , autrement dit  $x \in ]-\infty; \frac{3}{2}[$ .

Alors  $2x - 3 < 0$ . Puisque  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ , l'inéquation  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 2x - 3$  n'est pas vérifiée. Elle n'a pas de solution dans  $]-\infty; \frac{3}{2}[$ .

Second cas:  $x \in D$  et  $x \geq \frac{3}{2}$ , autrement dit  $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right[ \cup [3; +\infty[$ .

Les deux membres de l'inéquation sont positifs. La fonction carré étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , l'inéquation est équivalente à

$$\left(\sqrt{x^2 - 5x + 6}\right)^2 \leq (2x - 3)^2$$

ce qui, après simplification, donne

$$0 \leq 3x^2 - 7x + 3.$$

Cette inéquation est, dans  $\mathbb{R}$ , vérifiée pour

$$x \in \left] -\infty; \frac{7 - \sqrt{13}}{6} \right] \cup \left[ \frac{7 + \sqrt{13}}{6}; +\infty \right[.$$

Or  $\frac{7 - \sqrt{13}}{6} \simeq 0,56$  et  $\frac{7 + \sqrt{13}}{6} \simeq 1,76$ .

Le domaine d'étude de ce second cas étant  $\left[\frac{3}{2}; 2\right[ \cup [3; +\infty[$ , on en déduit que les solutions de l'inéquation sur  $\left[\frac{3}{2}; 2\right[ \cup [3; +\infty[$  sont les éléments de  $\left[\frac{7 + \sqrt{13}}{6}; 2\right[ \cup [3; +\infty[$ .

Finalement, puisque l'étude du premier cas n'a abouti à aucune solution, l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est :

$$S = \left[\frac{7 + \sqrt{13}}{6}; 2\right[ \cup [3; +\infty[.$$

**Exercice 13** Rappelons que pour tout réel  $x$ , on a :  $|x| = x$  si  $x \geq 0$   
 $|x| = -x$  si  $x \leq 0$ .

De ceci, on déduit que pour tout réel  $y$ , on a :  $|y - 1| = y - 1$  si  $y - 1 \geq 0$   
 $|y - 1| = 1 - y$  si  $y - 1 \leq 0$ .

En raisonnant par disjonction de cas, on est amené alors, pour trouver l'ensemble des points demandés, à distinguer les quatre cas suivants :

1.  $x \geq 0$  et  $y - 1 \geq 0$ ;

2.  $x \leq 0$  et  $y - 1 \geq 0$ ;
3.  $x \leq 0$  et  $y - 1 \leq 0$ ;
4.  $x \geq 0$  et  $y - 1 \leq 0$ .

Cas 1: On se place dans le quart de plan  $P_1$  défini par  $x \geq 0$  et  $y - 1 \geq 0$ .

$|x| + |y - 1| = 2$  est alors équivalent à  $x + y - 1 = 2$ , c'est-à-dire  $y = -x + 3$ . On obtient une équation réduite d'une droite  $D_1$  dont on ne garde que les points situés dans le quart de plan  $P_1$ . On obtient le segment  $[AB]$ .

Cas 2: On se place dans le quart de plan  $P_2$  défini par  $x \leq 0$  et  $y - 1 \geq 0$ .

$|x| + |y - 1| = 2$  est alors équivalent à  $-x + y - 1 = 2$ , c'est-à-dire  $y = x + 3$ . On obtient le segment  $[BC]$ .

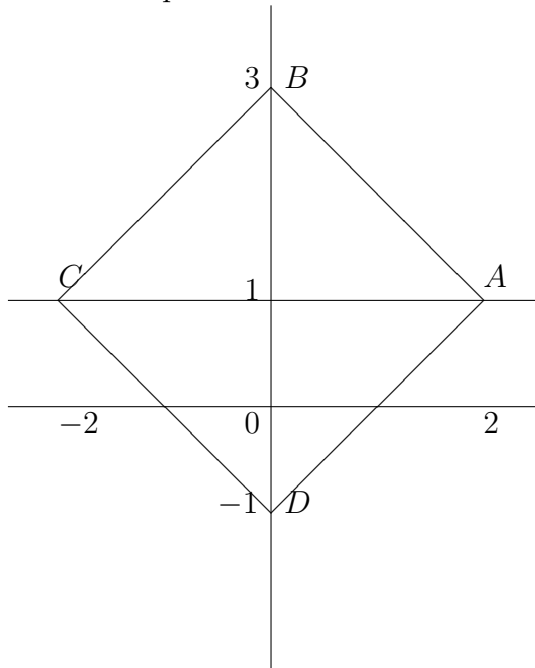
Cas 3: On se place dans le quart de plan  $P_3$  défini par  $x \leq 0$  et  $y - 1 \leq 0$ .

$|x| + |y - 1| = 2$  est alors équivalent à  $-x - y + 1 = 2$ , c'est-à-dire  $y = -x - 1$ . On obtient le segment  $[CD]$ .

Cas 4: On se place dans le quart de plan  $P_4$  défini par  $x \geq 0$  et  $y - 1 \leq 0$ .

$|x| + |y - 1| = 2$  est alors équivalent à  $x - y + 1 = 2$ , c'est-à-dire  $y = x - 1$ . On obtient le segment  $[DA]$ .

L'ensemble des points cherchés est la réunion des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ , c'est-à-dire le quadrilatère  $ABCD$ :



**Remarque** On aurait pu limiter cette étude à la partie du plan définie par  $x \geq 0$  et  $y - 1 \geq 0$ , en remarquant que les droites d'équation  $y = 1$  et  $x = 0$  étaient des axes de symétrie pour l'ensemble des points cherchés.

**Exercice 14** On suppose que  $(A \cap B \subset A \cap C$  et  $A \cup B \subset A \cup C)$ . On démontre alors que  $B \subset C$ .

Soit  $x \in B$ . Prouvons que  $x \in C$ .

On réalise une disjonction de cas selon que  $x$  est élément de  $A$  ou non.

– Premier cas:  $x \in A$ .

Puisque  $x \in B$ , on a  $x \in A \cap B$ . L'inclusion  $A \cap B \subset A \cap C$  prouve alors que  $x \in A \cap C$ .  
On en déduit que  $x \in C$ .

– Second cas:  $x \notin A$ .

Puisque  $x \in B$ , on peut écrire que  $x \in A \cup B$ . L'inclusion  $A \cup B \subset A \cup C$  prouve alors que  $x \in A \cup C$ , c'est-à-dire ( $x \in A$  ou  $x \in C$ ).

Puisque  $x \notin A$ , on en déduit que  $x \in C$ .

Enfin, on a prouvé que, pour tout  $x \in E$ , ( $x \in B \implies x \in C$ ). On a donc établi l'inclusion  $B \subset C$ .

## Exercice 15

1. **Démonstration par récurrence.** Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

– Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $P(n)$  la propriété à établir :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

– Initialisation. La propriété  $P(1)$  est vérifiée. En effet, on peut écrire :

$$(1+x)^1 \geq 1+1 \times x.$$

– Hérédité. Soit un entier  $n \geq 1$ .

On suppose que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire que  $(1+x)^n \geq 1+nx$ . On multiplie chaque membre de cette inégalité par le nombre réel positif  $1+x$ . On obtient

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

c'est-à-dire

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2.$$

Or  $nx^2 \geq 0$ , donc  $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ . Des deux inégalités précédentes, on déduit que :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

ce qui établit la propriété  $P(n+1)$ .

– Conclusion.

On a établi  $P(1)$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'implication ( $P(n) \implies P(n+1)$ ).

On en déduit que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $P(n)$  est vraie.

2. **Démonstration en utilisant le binôme de Newton.** Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ . Soit un entier  $n \geq 1$ . La formule du binôme de Newton donne :

$$(1+x)^n = \mathbb{C}_n^0 1^n + \mathbb{C}_n^1 1^{n-1}x + \mathbb{C}_n^2 1^{n-2}x^2 + \dots + \mathbb{C}_n^k 1^{n-k}x^k + \dots + \mathbb{C}_n^n x^n.$$

Puisque que  $\mathbb{C}_n^0 = 1$  et  $\mathbb{C}_n^1 = n$ , on obtient :

$$(1+x)^n = 1+nx + \mathbb{C}_n^2 x^2 + \dots + \mathbb{C}_n^k x^k + \dots + \mathbb{C}_n^n x^n.$$

Le nombre  $x$  étant positif ou nul, la somme  $\mathbb{C}_n^2 x^2 + \dots + \mathbb{C}_n^k x^k + \dots + \mathbb{C}_n^n x^n$  formée de termes tous positifs ou nuls, est positive ou nulle. Ceci établit l'inégalité

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

3. **Démonstration en utilisant les variations d'une fonction auxiliaire.** On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\varphi(x) = (1+x)^n - (1+nx)$$

et on étudie ses variations dans le but d'obtenir son signe.

Pour tout  $x \geq 0$ ,  $\varphi'(x) = n[(1+x)^{n-1} - 1]$ .

$1+x \geq 1$  donc  $(1+x)^{n-1} \geq 1^{n-1}$ , donc  $\varphi'(x) \geq 0$ .

La fonction  $\varphi$  est donc croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Donc si  $x \geq 0$ ,  $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ .

Or  $\varphi(0) = 0$ , donc  $\varphi(x) \geq 0$ , ce qui établit l'inégalité

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

**Exercice 16** Notons  $I$  l'intervalle  $] -1; +\infty[$  et  $u$  la fonction  $x \mapsto x+1$ .

- Étudions les premières valeurs de  $n$  afin d'émettre une conjecture.

| $n$     | Dérivabilité de $f$ sur $I$<br>sachant que $u$ est dérivable sur $I$<br>et à valeurs strictement positives | Calcul des dérivées successives<br>sachant que $u' : x \mapsto 1$ |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $n = 1$ | $f = \ln \circ u$<br>donc $f$ est dérivable sur $I$                                                        | $f' = \frac{u'}{u} = \frac{1}{u}$                                 |
| $n = 2$ | $f' = \frac{1}{u}$<br>donc $f'$ est dérivable sur $I$                                                      | $f'' = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u^2}$                          |
| $n = 3$ | $f'' = -\frac{1}{u^2} = -u^{-2}$<br>donc $f''$ est dérivable sur $I$                                       | $f''' = -(-2)u'u^{-3} = \frac{2}{u^3}$                            |
| $n = 4$ | $f''' = 2u^{-3}$<br>donc $f'''$ est dérivable sur $I$                                                      | $f^{(4)} = 2(-3)u'u^{-4} = -\frac{2 \times 3}{u^4}$               |

- On peut donc conjecturer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $f$  est dérivable à l'ordre  $n$  sur  $I$  et

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{u^n}.$$

Notons  $P(n)$  cette propriété.

- Démontrons par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ , la propriété  $P(n)$  est vraie.

- La propriété  $P(1)$  est vérifiée. En effet,  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f' = \frac{1}{u} = (-1)^0 \frac{0!}{u}$  (avec  $(-1)^0 = 1$  et  $0! = 1$ ).

- Soit un entier  $n \geq 1$ .

On suppose que  $P(n)$  est vraie:  $f$  est donc dérivable à l'ordre  $n$  sur  $I$  et

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{u^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! u^{-n}.$$

La fonction  $f^{(n)}$  est donc dérivable sur  $I$  et

$$\begin{aligned}f^{(n+1)} &= (-1)^{n-1}(n-1)! \times (-n)u'u^{-n-1} \\f^{(n+1)} &= (-1)^n n! u^{-(n+1)} \\f^{(n+1)} &= (-1)^n \frac{n!}{u^{n+1}}\end{aligned}$$

ce qui établit la propriété  $P(n+1)$ .

- Conclusion : on a établi  $P(1)$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'implication  $(P(n) \implies P(n+1))$ . On en déduit que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $f$  est dérivable à l'ordre  $n$  sur  $I$  et

$$f^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{u^n}$$

ou encore, pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$ ,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}.$$