

## Corrigé de l'envoi 2 — 2004/2005

### Problème 1 :

Soient  $n \geq 2$  un entier et  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  des réels tels que  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ . Prouver que :

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \leq 2 \left| 1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|$$

---

### Notre solution :

Dans un tel exercice, on a bien envie d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Mais une utilisation brutale de cette inégalité ne donne en fait que :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = 1$$

ce qui n'apparaît pas franchement comme très intéressant...

Et pourtant, si ! En effet, si l'on se demande comment faire intervenir  $(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$ , il est assez naturel de majorer violemment par  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$ . Et le reste découle alors d'une bonne connaissance de la démonstration donnée dans le poly de l'inégalité de Cauchy-Schwarz<sup>1</sup>, qui fournit une solution évidente au problème :

$$\begin{aligned} (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \\ &= 1 - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \\ &= \left( 1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left( 1 + \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \leq 2 \left| 1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \end{aligned}$$

---

### Remarque.

Lorsque  $n = 2$ , l'inégalité proposée s'interprète facilement géométriquement. Plus exactement notons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  les vecteurs de coordonnées respectives  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$ . L'hypothèse nous dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de norme 1 et ainsi si l'on note  $\alpha$  l'angle (non orienté) qu'ils forment, on a par les propriétés classiques :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ |\sin \alpha| &= |x_1 y_2 - x_2 y_1| \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Voir <http://www.animath.fr/cours/inegalites.ps.gz> ou <http://www.animath.fr/cours/inegalites.pdf>.

Autrement dit, l'inégalité que l'on doit prouver se réécrit :

$$\sin^2 \alpha \leq 2|1 - \cos \alpha| = 2 - 2 \cos \alpha$$

En remplaçant  $\sin^2 \alpha$  par  $1 - \cos^2 \alpha$ , on en est réduit à prouver que le nombre :

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 = (\cos \alpha - 1)^2$$

est positif, ce qui est une évidence.

En réalité, on peut faire une analyse analogue lorsque  $n = 3$  en faisant intervenir le produit vectoriel. On note  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  les vecteurs de l'espace de coordonnées respectives  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(y_1, y_2, y_3)$ . Ils sont de norme 1 par hypothèse et si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle (forcément non orienté) qu'ils font, on a les relations :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ \sin^2 \alpha &= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 \end{aligned}$$

et la somme intermédiaire que l'on était amené à considérer dans la solution précédente intervient alors naturellement. L'inégalité :

$$\sin^2 \alpha \leq 2|1 - \cos \alpha| = 2 - 2 \cos \alpha$$

est bien entendu encore vérifiée, et elle fournit ici :

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 \leq 2|1 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3|$$

ce qui est plus fort que ce l'on désire.

L'approche précédente, outre le fait de traiter les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  donne des indications sur un angle d'attaque de l'exercice. D'autre part, avec des notions non élémentaires, elle se généralise directement au cas général. Expliquons vaguement comment cela fonctionne.

Tout  $n$ -uplet de réels peut être considéré comme les coordonnées d'un vecteur d'un espace de dimension  $n$ . Si l'on note encore  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  les vecteurs de coordonnées respectives  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , l'hypothèse de l'énoncé nous assure à nouveau qu'ils sont de norme 1. D'autre part, il est à nouveau possible de définir l'angle qu'ils forment, en étendant la notion de produit scalaire. Par définition, c'est l'angle  $\alpha$  (non orienté) qui vérifie :

$$\cos \alpha = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous dit précisément que le produit scalaire est plus petit en valeur absolue que 1 et dont qu'il est bien égal au cosinus d'un angle. En outre il est possible d'accéder au sinus de  $\alpha$  (ou du moins à son carré) par la formule générale<sup>2</sup> :

$$\sin^2 \alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

En fait il est assez simple de vérifier cette formule ; il suffit de constater que :

$$1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

la dernière égalité étant le calcul fait dans la solution que nous avons proposée. Et alors, à nouveau, l'inégalité de l'énoncé est impliquée par :

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 = (\cos \alpha - 1)^2 \geq 0$$

---

<sup>2</sup>De façon très théorique, la valeur absolue du sinus correspond à la norme d'un vecteur d'un espace de dimension  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ , espace communément appelé *puissance extérieure deuxième* de  $\mathbb{R}^n$  et noté  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ .

## Corrigé de l'envoi 2 — 2004/2005

### Problème 2 :

Sur une île déserte<sup>3</sup>, cohabitent trois clans de filles, les blondes, les brunes et les rousses. Lorsque deux clans (représentés au complet) se rencontrent :

- ☞ s'ils comptent le même nombre de filles, celles-ci rejoignent toutes le troisième clan, et se teignent donc les cheveux par la couleur correspondante ;
- ☞ sinon, une partie des filles du clan majoritaire rejoint l'autre clan en adoptant sa couleur de cheveux de sorte que l'effectif du clan minoritaire double, puis les deux clans se séparent.

On suppose qu'il y a  $17 \cdot 2^{10}$  filles en tout sur l'île et qu'une seule est rousse. Prouver que quelle que soit la répartition des filles selon les deux autres teintes de cheveux, il existe toujours une suite de rencontres entre les différents clans de sorte qu'au final toutes les filles fassent partie du même clan, et donc par le fait arrêtent de se créper le chignon.

---

### Notre solution :

Nous allons proposer une suite de rencontres telles qu'au final toutes les filles de l'île déserte soient rousses.

Au départ, il y a une unique rousse et donc  $17 \cdot 2^{10} - 1$  filles qui sont soit blondes soit brunes. Ainsi, il y a au moins un des deux derniers clans qui compte strictement plus d'une fille. Si l'on fait rencontrer ce clan avec le clan formé par la seule fille rousse, d'après les règles de l'île, le clan de la rousse va voir son effectif doubler. Autrement dit, maintenant, il y a 2 rousses.

On peut alors continuer ainsi : parmi les clans des blondes et des brunes, il y en a au moins un dont l'effectif compte strictement plus de 2 filles. En faisant rencontrer ce clan avec celui des rousses, on double à nouveau l'effectif du clan des rousses. On passe ainsi à 4 rousses. Successivement, on obtient 8 puis 16 rousses, et ainsi de suite jusqu'à avoir  $1024 = 2^{10}$  rousses.

À ce moment, il y a  $16 \times 2^{10} = 2^{14}$  filles sur l'île qui ne sont pas rousses. Nous allons montrer maintenant que si l'on organise simplement des rencontres entre blondes et brunes, celles-ci vont s'« entretuer » pour devenir au final toutes rousses.

Supposons que parmi les non-rousses, il y en ait  $x$  blondes et  $y$  brunes (et donc  $x + y = 2^{14}$ ). Si  $x = y$ , en organisant une seule rencontre, on obtient ce que l'on voulait. Sinon, si  $x < y$  par exemple, on aura, après une rencontre,  $x_1 = 2x$  filles blondes et  $y_1 = 2^{14} - 2x$  filles brunes. Si  $x > y$ , on aura  $x_1 = 2^{14} - 2y$  filles blondes et  $2y$  filles brunes. Dans tous les cas, on constate que  $x_1$  et  $y_1$  sont tous les deux pairs.

On organise alors une nouvelle rencontre. Si  $x_1 = y_1$ , on a gagné. Sinon, on refait le raisonnement précédemment pour conclure qu'après celle-ci, il y aura  $x_2$  filles blondes et  $y_2$  filles brunes où  $x_2$  et  $y_2$  sont tous les deux des multiples de 4.

Ainsi de suite, soit les blondes et les brunes disparaissent, soit ce n'est pas le cas et après la  $k$ -ième rencontre (avec  $1 \leq k \leq 13$ ), il y aura  $x_k$  filles blondes et  $y_k$  filles brunes où  $x_k$  et  $y_k$  sont tous les deux des multiples de  $2^k$ . Mais la seule solution, lorsque  $k = 13$ , c'est d'avoir  $x_k = y_k = 2^{13}$ . Ainsi, si ce n'est pas fait avant, après la quatorzième rencontre, il n'y aura plus que des rousses.

---

<sup>3</sup>Presque...

## Corrigé de l'envoi 2 — 2004/2005

### Problème 3 :

Soient  $i$  et  $j$  des entiers tels que  $1 \leq j \leq i$ . Prouver que :

$$\sum_{p=0}^j (-1)^p \binom{i}{p} \binom{i+j-p-1}{j-p} = 0$$

---

### Notre solution :

Dans ce qui suit, on adopte la convention usuelle  $\binom{n}{p} = 0$  si  $n < p$ . On va donner une interprétation combinatoire du résultat demandé, ce qui va nous éviter de faire le moindre calcul.

Considérons une assemblée de  $i$  garçons et de  $j - 1$  filles. On va former des groupes de  $j$  personnes dont certains (éventuellement aucun) seront des chefs. Mais pour une raison évidente, les chefs devront obligatoirement être des garçons<sup>4</sup>.

Pour former un tel groupe, on peut alors commencer par décider qu'il y aura  $p$  chefs et tout de suite les choisir parmi les  $i$  garçons. Puis, on n'a plus qu'à compléter le groupe en choisissant  $j - p$  personnes parmi les  $i + j - p - 1$  autres que les chefs déjà choisis. Pour un  $p$  fixé, il y a donc exactement  $\binom{i}{p} \binom{i+j-p-1}{j-p}$  groupes possibles avec  $p$  chefs. L'énoncé demande donc simplement de prouver que le nombre total de groupes avec un nombre pair de chefs est égal au nombre total de groupes avec un nombre impair de chefs.

Or, on peut former nos groupes d'une autre façon. En effet, on peut commencer par choisir les  $j$  personnes qui vont faire partie du groupe. Ce choix étant fait, comme il n'y a que  $j - 1$  filles en tout, on est sûr qu'on a choisi au moins un garçon. Soit  $g$  le nombre de garçons parmi ces  $j$  personnes (donc  $g \geq 1$ ). Il reste à élire les chefs. Mais avec ces  $j$  personnes, il y a exactement  $\binom{g}{0} + \binom{g}{2} + \binom{g}{4} + \dots$  groupes possibles ayant un nombre pair de chefs, et exactement  $\binom{g}{1} + \binom{g}{3} + \binom{g}{5} + \dots$  groupes possibles ayant un nombre impair de chefs. Or, d'après la formule du binôme, il est bien connu que, puisque  $g \geq 1$ , on a :

$$0 = (1 - 1)^g = \sum_{k=0}^g (-1)^k \binom{g}{k}$$

ce qui assure que notre choix de  $j$  personnes contribue à autant de groupes ayant un nombre pair de chefs que de groupes ayant un nombre impair de chefs. Ceci étant vrai pour un choix arbitraire de  $j$  personnes, il suffit de sommer sur tous ces choix possibles pour obtenir la conclusion souhaitée.

---

<sup>4</sup>NdLR : Les énoncés et les solutions, reproduits ici par nos soins, n'engagent que leurs auteurs...

## Corrigé de l'envoi 2 — 2004/2005

### Problème 4 :

On suppose que les paraboles d'équations respectives  $y = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ) et  $y = dx^2 + ex + f$  (avec  $d \neq 0$ ) n'ont aucun point commun. Prouver qu'il existe une droite qui ne rencontre aucune de ces deux paraboles.

---

### Notre solution :

Si le produit  $ad$  est strictement positif, alors les paraboles sont tournées dans le même sens, et il existe à l'évidence une droite horizontale soit plus haute que les deux maxima, soit plus basse que les deux minima. Dans tous les cas, elle ne rencontre aucune des paraboles.

Supposons donc  $ad < 0$ . La tangente à la première des paraboles au point d'abscisse  $t$  a pour pente  $2at + b$ , et la tangente à la seconde au point d'abscisse  $t$  a pour pente  $2dt + e$ . On peut donc trouver un  $t$  pour lequel ces deux tangentes sont parallèles. Bien entendu, elles sont distinctes (sans quoi le point de tangence serait commun). Comme les paraboles sont des courbes convexes, elles sont toujours situées du même côté par rapport à leur tangente (si la parabole est tournée vers le haut, la tangente est en-dessous de la courbe, sinon elle est au dessus). Ainsi, en prenant une droite  $\Delta$  parallèle aux tangentes ci-dessus, et située entre ces deux droites, on obtient la conclusion désirée.

---

### Remarque.

La propriété importante, ici, est la convexité. Plus exactement, il existe un théorème plus général<sup>5</sup> qui affirme que si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux parties convexes du plan<sup>6</sup> d'intersection vide, alors il existe une droite qui les sépare, c'est-à-dire qui est telle que  $C_1$  est entièrement contenu dans l'un des demi-plans fermés défini par la droite et  $C_2$  dans l'autre. Notez que dans la toute généralité de ce théorème, il est possible que les droites touchent les convexes.

Il est assez facile de prouver le théorème précédent dans le cas où il existe un point  $M_1 \in C_1$  et un point  $M_2 \in C_2$  à distance minimale (on entend par là que pour tout  $A \in C_1$  et  $B \in C_2$ , on a  $AB \geq M_1M_2$ ), car dans ce cas, on vérifie que la médiatrice du segment  $[M_1M_2]$  convient. En outre, cette médiatrice ne rencontre ni  $C_1$  ni  $C_2$ .

Ce dernier cas est en fait celui de l'exercice, en prenant pour  $C_1$  et  $C_2$  les parties convexes délimitées par les paraboles. Toutefois, il faut donner une justification à l'existence des points  $M_1$  et  $M_2$ , ce qui n'est en réalité pas si simple.

---

<sup>5</sup>Pour information, c'est un cas extrêmement particulier du théorème de Hanh-Banach.

<sup>6</sup>Un sous-ensemble  $C$  du plan est dit convexe si pour tous points  $A$  et  $B$  de  $C$ , le segment  $[AB]$  tout entier est contenu dans  $C$ .

## Corrigé de l'envoi 2 — 2004/2005

### Problème 5 :

Soit  $n > 1$  un entier impair. Soit  $S$  l'ensemble des entiers  $x \in \{1, \dots, n\}$  et tels que  $x$  et  $x + 1$  soient tous deux premiers avec  $n$ . Prouver que :

$$\prod_{x \in S} x \equiv 1 \pmod{n}$$

---

### Notre solution :

On va s'inspirer de la démonstration du théorème de Wilson qui est dans le poly<sup>7</sup>...

Si  $a \in S$ , il existe un unique  $b \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que  $ab \equiv 1 \pmod{n}$ . On va prouver que  $b \in S$ .

Clairement,  $b$  est premier avec  $n$ . On veut donc prouver que  $b + 1$  est premier avec  $n$ . Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un entier  $c$  tel que  $(b + 1)c \equiv 1 \pmod{n}$ . Informellement, on peut écrire :

$$c \equiv \frac{1}{b+1} \equiv \frac{1}{\frac{1}{a}+1} \equiv \frac{a}{a+1} \pmod{n}$$

ce qui suggère de prendre pour  $c$  le produit de  $a$  par un inverse de  $a + 1$ . Et effectivement si l'on note  $x$  un entier tel que  $(a + 1)x \equiv 1 \pmod{n}$  (qui existe bien par hypothèse), et que l'on pose  $c = ax$ , on peut calculer :

$$(b + 1)c = (b + 1)ax = bax + ax \equiv x + ax = (a + 1)x \equiv 1 \pmod{n}$$

Ainsi  $b + 1$  admet un inverse modulo  $n$  et donc est premier avec  $n$ . On en déduit que  $b \in S$  comme annoncé.

Bien sûr, si  $b$  est associé à  $a$  comme ci-dessus, alors  $a$  est associé à  $b$ . Si  $a = b$  alors  $0 \equiv a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1) \pmod{n}$ , et comme  $a + 1$  est premier avec  $n$ , c'est donc que  $a - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ , c'est-à-dire que  $a = 1$ . Par suite, les éléments de  $S \setminus \{1\}$  peuvent être regroupés par paires  $(a, b)$  telles que  $ab \equiv 1 \pmod{n}$ . Cela assure que le produit des éléments de  $S$  est bien congru à 1 modulo  $n$ .

---

<sup>7</sup>Voir <http://www.animath.fr/cours/arithm.ps.gz> ou <http://www.animath.fr/cours/arithm.pdf>.

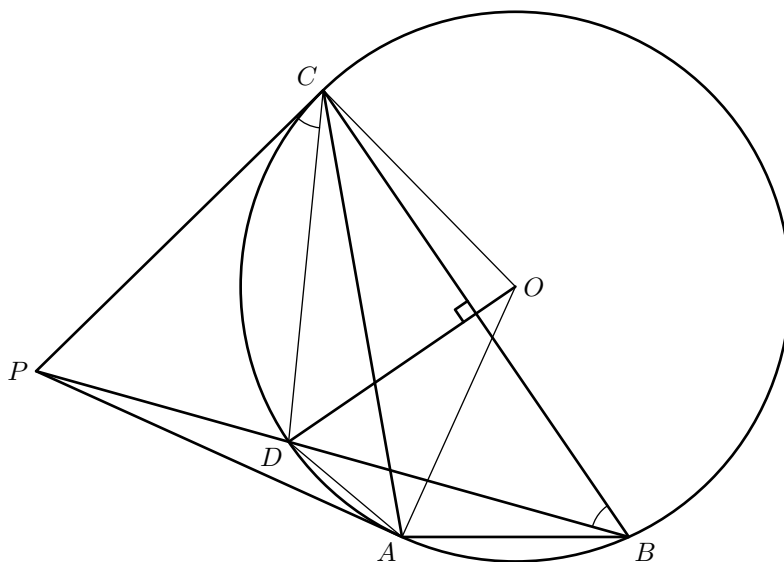
## Corrigé de l'envoi 2 — 2004/2005

### Problème 6 :

Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AC = 2AB$  et soit  $\Gamma$  son cercle circonscrit. Les tangentes à  $\Gamma$  en  $A$  et en  $C$  se rencontrent en  $P$ . Prouver que le point d'intersection de la droite  $(BP)$  et de la médiatrice de  $[BC]$  appartient à  $\Gamma$ .

### Notre solution :

Soit  $D$  l'autre point d'intersection de la droite  $(BP)$  et de  $\Gamma$ . On va prouver que  $BD = CD$  ce qui assurera que  $D$  est sur la médiatrice de  $[BC]$  et donc la conclusion.



Puisque  $(PC)$  est la tangente à  $\Gamma$  en  $C$ , on a  $\widehat{PCD} = \widehat{CBD}$ . Comme, de plus, on a  $\widehat{CPD} = \widehat{CPB}$ , on en déduit que les triangles  $PCD$  et  $PBC$  sont semblables. De même, les triangles  $PAB$  et  $PDA$  sont semblables. On a alors  $PC/PD = BC/CD$  et  $AB/DA = PA/PD$ . Puisque  $PA = PC$  (la droite  $(PO)$  est axe de symétrie de  $\Gamma$  et donc échange les droites  $(PA)$  et  $(PC)$  toutes deux tangentes au cercle), il vient alors  $AB/DA = BC/CD$ , ou encore  $AB \cdot CD = DA \cdot BC$ .

Or, le théorème de Ptolémée donne  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + DA \cdot BC$ . Ainsi,  $AC \cdot BD = 2AB \cdot CD$ , et puisque  $AC = 2AB$ , il vient finalement  $BD = CD$ , comme annoncé.