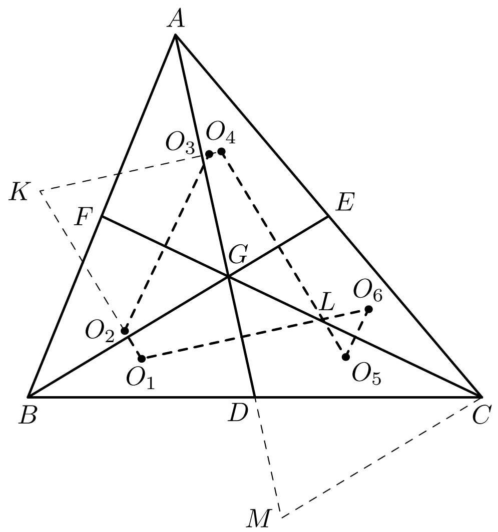
Corrigé de l'envoi 4 — 2003 / 2004

Problème 1 :

Un triangle est divisé en six petits triangles par ses médianes. Prouver que les six centres des cercles circonscrits à chacun de ces petits triangles sont cocyliques.

Notre solution :

Soit ABC ce triangle, G son centre de gravité et D, E, F les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. On note en outre O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 les centres des cercles circonscrits à DBG, BFG, FAG, AEG, ECG, CDG respectivement.



Comme le centre du cercle circonscrit est sur les médiatrices des côtés, les droites (O_3O_4), (O_6O_1) sont les médiatrices de $[AG]$ et $[GD]$, donc sont perpendiculaires à (AD) et distantes de $(1/2\cdot 2/3+1/2\cdot 1/3)AD = AD/2$. De la même manière, (O_1O_2) et (O_4O_5) sont perpendiculaires à (BE) et distantes de $BE/2$. Si l'on note alors K le point d'intersection de (O_1O_2) et (O_3O_4), et L celui de (O_4O_5) et (O_6O_1), le parallèlogramme KO_4LO_1 a pour aire :

$$\text{base} \times \text{hauteur} = KO_4 \cdot AD/2 = KO_1 \cdot BE/2$$

d'où $KO_1/KO_4 = AD/BE$.

D'autre part, comme (KO_2) est perpendiculaire à (BG), (O_2O_3) à (FG) et (KO_3) à (AG), on a $\widehat{KO_2O_3} = \widehat{BGF}$ et $\widehat{KO_3O_2} = \widehat{FGA}$. Il en résulte que :

$$\widehat{O_2KO_3} = \pi - \widehat{BGF} - \widehat{FGA} = \widehat{DGB}$$

Soit alors M le point de (AG) tel que (MC) soit parallèle à (BG). Comme $\widehat{MCG} = \widehat{BGF}$, $\widehat{MGC} = \widehat{FGA}$ et $\widehat{GMC} = \widehat{BGD}$, les triangles KO_2O_3 et MCG sont semblables.

En outre, puisque $\widehat{MCD} = \widehat{GBD}$, $\widehat{MDC} = \widehat{GDB}$ et $CD = BD$, les triangles MCD et GBD sont symétriques par rapport à D. En particulier :

$$MG = 2GD = \frac{2}{3}AD \quad \text{et} \quad MC = GB = \frac{2}{3}BE$$

Ainsi, on obtient $KO_3/KO_2 = MG/MC = AD/BE = KO_1/KO_4$, c'est-à-dire $KO_1 \cdot KO_2 = KO_3 \cdot KO_4$, de sorte que O_1, O_2, O_3 et O_4 sont cocycliques. On montre de même que O_2, O_3, O_4, O_5, puis O_3, O_4, O_5, O_6 sont cocycliques, et l'on obtient bien, finalement, que les centres des cercles circonscrits aux six petits triangles sont cocycliques.

Corrigé de l'envoi 4 — 2003 / 2004

Problème 2 :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que :

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = f(x)^3 + f(y)^3 + f(z)^3$$

pour tous entiers x, y, z.

Notre solution :

Trois solutions évidentes sont données par les fonctions $f(x) = 0$, $f(x) = x$ et $f(x) = -x$. On va voir que ce sont les seules.

En effet, soit f une fonction solution. En posant $x = y = z = 0$, il vient $f(0) = 3f(0)^3$, et par suite, comme 0 est la seule racine entière du polynôme $3X^3 - X$, $f(0) = 0$. Ensuite, avec $y = -x$ et $z = 0$, on obtient $f(-x)^3 = -f(x)^3$, donc la fonction f est impaire.

Avec $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, il vient $f(1) = f(1)^3$, donc $f(1)$ vaut 0, 1 ou -1. En outre, avec $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ et $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, on trouve que $f(2) = 2f(1)$ et $f(3) = 3f(1)$. Pour conclure, il suffirait de voir que, de la même manière, on a $f(x) = xf(1)$ pour tout x. On utilise pour cela le lemme suivant.

Lemme. *Pour tout entier $x \geqslant 4$, x^3 peut s'écrire comme somme de cinq cubes d'entiers strictement inférieurs à x en valeur absolue.*

Démonstration. On traite à part le cas de 4, 5, 6 et 7 :

$$\begin{aligned}
4^3 &= 3^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 \\
5^3 &= 4^3 + 4^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 \\
6^3 &= 5^3 + 4^3 + 3^3 + 0^3 + 0^3 \\
7^3 &= 6^3 + 5^3 + 1^3 + 1^3 + 0^3
\end{aligned}$$

Pour les entiers impairs de la forme $x = 2k + 1$, $k \geqslant 4$, la formule :

$$(2k + 1)^3 = (2k - 1)^3 + (k + 4)^3 + (4 - k)^3 + (-5)^3 + (-1)^3$$

suffit à conclure, chacun des entiers $2k-1$, $k+4$, $|4-k|$, 5 et 1 étant strictement plus petits que x. Enfin, le cas des entiers pairs $x = 2k$, $k \geqslant 4$ est immédiat par récurrence : on peut supposer que l'on sait déjà écrire k^3 sous la forme $a_1^3 + \cdots + a_5^3$ avec $|a_i| < k$ pour tout i, et il vient alors $x^3 = (2a_1)^3 + \cdots + (2a_5)^3$. $\square$

Muni de ce lemme, on peut montrer par récurrence que $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ (et donc dans $\mathbb{Z}$, par imparité). On a déjà le résultat pour $|x| \leqslant 3$. Soit donc $x \geqslant 4$, tel que l'on ait $f(y) = yf(1)$ pour tout y tel que $|y| < x$. D'après le lemme, on peut écrire x^3 comme somme de cinq cubes $x_1^3 + \cdots + x_5^3$ avec $|x_i| < x$ pour tout i. Il en résulte que $x^3 + (-x_4)^3 + (-x_5)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$. L'hypothèse sur f et l'imparité donnent donc :

$$f(x)^3 - f(x_4)^3 - f(x_5)^3 = f(x_1)^3 + f(x_2)^3 + f(x_3)^3$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient alors :

$$f(x)^3 = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3)f(1)^3 = (xf(1))^3$$

d'où finalement $f(x) = xf(1)$.

Les fonctions recherchées sont donc exactement les trois fonctions f définies par $f(x) = 0$, $f(x) = x$ et $f(x) = -x$.

Corrigé de l'envoi 4 — 2003 / 2004

Problème 3 :

Dans le plan, on a tracé n cercles de rayon 1. On suppose que tout cercle en rencontre au moins un autre, mais que deux quelconques ne sont jamais tangents. Prouver qu'ils définissent au moins n points d'intersection distincts.

Notre solution :

Pour un cercle Γ, on note $p(\Gamma)$ le nombre de points d'intersection qui sont sur Γ, et pour un point d'intersection M, on note $c(M)$ le nombre de cercles qui passent par M. On note N le nombre de points d'intersection (dans ce qui suit, les points dont il est question sont tous des points d'intersection).

Clairement, on a $c(M) \geqslant 2$ pour tout point M. D'autre part, puisque tout cercle en rencontre au moins un autre et ne lui est pas tangent, on a donc $p(\Gamma) \geqslant 2$ pour tout cercle Γ.

Soit M un point et Γ un des cercles qui contient M Alors :

$$c(M) \leqslant p(\Gamma) \tag{1}$$

En effet, chacun des $c(M)-1$ autres cercles qui contiennent M rencontrent Γ en un autre point que M (pas de tangence). Et ces points sont deux à deux distincts, car par deux points donnés il ne passe que deux cercles de rayon 1. Ainsi, en plus de M, le cercle Γ contient au moins $c(M)-1$ autres points d'intersection.

Posons alors :

$$S = \sum_{(\Gamma,M)} \frac{1}{p(\Gamma)}$$

la somme portant sur tous les couples (Γ, M) pour lesquels M est sur Γ.

Or, en groupant par cercles, il vient :

$$S = \sum_{\Gamma} \sum_{M\in\Gamma} \frac{1}{p(\Gamma)} = \sum_{\Gamma} p(\Gamma) \cdot \frac{1}{p(\Gamma)} = n$$

D'autre part, en groupant par point d'intersection, et d'après (1), on a :

$$S = \sum_{M} \sum_{\Gamma\ /\ M\in\Gamma} \frac{1}{p(\Gamma)} \leqslant \sum_{M} \sum_{\Gamma\ /\ M\in\Gamma} \frac{1}{c(M)} = \sum_{M} c(M) \cdot \frac{1}{c(M)} = N$$

On a ainsi montré que $N \geqslant n$, ce qui conclut.

Corrigé de l'envoi 4 — 2003 / 2004

Problème 4 :

Soient a, b, c, d, e, f des réels tels que $a+b+c+d+e+f=0$. Montrer que l'on a :

$$ab+bc+cd+de+ef+fa \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right)$$

Notre solution :

On a $(a+c+e)(b+d+f) = -(a+c+e)^2 \geqslant 0$. Or :

$$(a+c+e)(b+d+f) = (ab+bc+cd+de+ef+fa)+(ad+be+fc)$$

Il en résulte que :

$$ab+cd+de+ef+fa \leqslant -ad-be-fc \leqslant \frac{a^2+d^2}{2}+\frac{b^2+e^2}{2}+\frac{f^2+c^2}{2}$$

ce qui conclut.

Autre solution :

On cherche à comparer deux polynômes en nos variables qui sont invariants par permutation circulaire des lettres. Il est donc probablement judicieux d'introduire les quatre polynômes de degré 2 typiques pour cette propriété :

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \\ \beta & = & ab+bc+cd+de+ef+fa \\ \gamma & = & ac+bd+ce+df+ea+fb \\ \delta & = & ad+be+cf \end{array}$$

Il s'agit de montrer que $\alpha \geqslant 2\beta$. Or on a :

$$(a+b+c+d+e+f)^2 = \alpha+2\beta+2\gamma+2\delta = 0$$

Et l'on peut décomposer d'autres sommes invariantes par permutations circulaires des lettres, par exemple :

$$\begin{array}{rcl} (a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2 & = & \alpha+2\delta \\ (a+c+e)^2+(b+d+f)^2 & = & \alpha+2\gamma \end{array}$$

Comme bien sûr $(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2+(a+c+e)^2+(b+d+f)^2 \geqslant 0$, il vient alors :

$$2\alpha+2\gamma+2\delta \geqslant \alpha+2\beta+2\gamma+2\delta$$

d'où le résultat.

Corrigé de l'envoi 4 — 2003 / 2004

Problème 5 :

Quels sont les entiers qui peuvent se représenter sous la forme :

$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz}$$

avec x, y, z des entiers strictement positifs ?

Notre solution :

Pour x, y, z entiers, on note $F(x,y,z) = (x+y+z)^2/(xyz)$. Soit alors n un entier s'écrivant sous la forme $F(x,y,z)$. On peut supposer sans perte de généralité que $x \leqslant y \leqslant z$, et choisir (x,y,z) avec z minimal pour une écriture de ce type. Comme on a :

$$nxyz = (x+y+z)^2 = (x+y)^2 + 2(x+y) + z^2$$

il vient que z divise $(x+y)^2$. Cela permet de donner une autre écriture de n :

$$F\left(x, y, \frac{(x+y)^2}{z}\right) = \frac{\frac{(x+y)^2}{z^2}(x+y+z)^2}{xy\frac{(x+y)^2}{z}} = \frac{(x+y+z)^2}{xyz} = n$$

et la minimalité de z assure donc que $(x+y)^2/z \geqslant z$, donc $x+y \geqslant z$. Écrivons alors :

$$n = \frac{x/y}{z} + \frac{y/z}{x} + \frac{z}{xy} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \leqslant \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \leqslant \frac{7}{x} + \frac{3}{z}$$

Ainsi, ou bien $z = 1$, et alors $n = F(1,1,1) = 9$, ou bien $z \geqslant 2$, et alors $n \leqslant 7 + 3/2 \leqslant 9$. Les entiers qu'on peut atteindre sont donc tous inférieurs à 9.

Montrons qu'on ne peut pas obtenir 7. En effet, si $n = 7$, l'inégalité $7 \leqslant 7/x + 3/z$ impose $x = 1$. De plus, comme $x + y \geqslant z$, on a $z = y$ ou $z = y + 1$. Selon le cas, y vérifie alors l'équation du second degré $(1+2y)^2 = 7y^2$ ou bien $(2+2y)^2 = 7y(y+1)$, mais ni l'une ni l'autre n'a de solution entière.

À l'inverse, on vérifie bien que $F(9,9,9) = 1$, $F(4,4,8) = 2$, $F(3,3,3) = 3$, $F(2,2,4) = 4$, $F(1,4,5) = 5$, $F(1,2,3) = 6$, $F(1,1,2) = 8$ et $F(1,1,1) = 9$.

Finalement, les entiers recherchés sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 et 9.

Corrigé de l'envoi 4 — 2003 / 2004

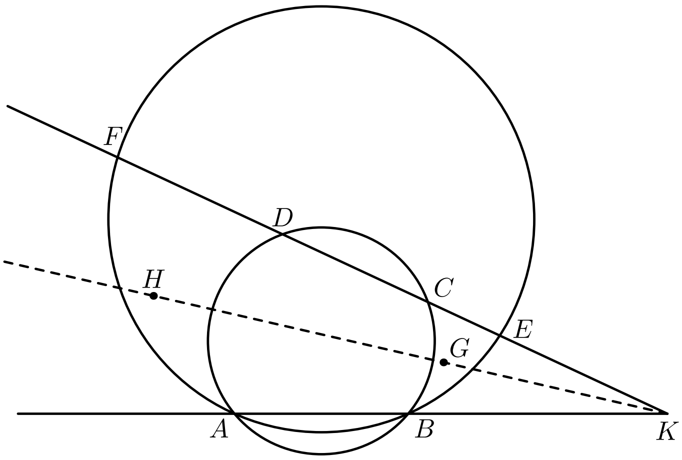
Problème 6 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, et tel que (AD) ne soit pas parallèle à (BC). Soient E et F deux points de (CD), tels que E, C, D, F soient alignés dans cet ordre. On note G et H les centres respectifs des cercles circonscrits à BCE et ADF. Prouver que les droites (AB), (CD) et (GH) sont concourantes ou parallèles si et seulement si les points A, B, E et F sont cocycliques.

Notre solution :

On appelle Γ le cercle circonscrit à $ABCD$.

Plaçons-nous tout d'abord dans la situation où (AB) et (CD) se coupent, et soit K leur point d'intersection. Supposons de plus A, B, E et F cocycliques.



En considérant l'angle sous lequel la corde $[AC]$ de Γ est vue depuis les points B et D, on voit que $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ADC} = \widehat{ADF}$. En outre, $\widehat{KBE} = \widehat{KFA}$. On a donc :

$$\widehat{DAF} = \pi - \widehat{AFD} - \widehat{ADF} = \pi - \widehat{KBE} - \widehat{ABC} = \widehat{CBE}$$

Le théorème de l'angle au centre montre alors que $\widehat{DHF} = 2\widehat{DAF} = 2\widehat{CBE} = \widehat{CGE}$. Les triangles isocèles DHF et CGE sont donc semblables.

En écrivant la puissance de K par rapport aux deux cercles, il vient $KE \cdot KF = KA \cdot KB = KC \cdot KD$, et donc $(KF - KD)/KD = (KC - KE)/KE$, c'est-à-dire $FD/KD = CE/KE$. Mais comme DHF et CGE sont semblables, on a aussi $DH/EG = FD/CE$, et ainsi $DH/EG = KD/KE$. De plus, toujours par similitude de DHF et CGE, on a $\widehat{KDH} = \widehat{KEG}$. Ces deux égalités montrent que KDH et KEG sont semblables, et donc que $\widehat{DKH} = \widehat{EKG}$. En pariculier, K, G et H sont alignés, et donc (AB), (CD) et (GH) sont concourantes.

Réciproquement, supposons (AB), (CD) et (GH) concourantes, c'est-à-dire K, G et H alignés, et soit F' le point d'intersection autre que E du cercle circonscrit à ABE avec la droite (CD). Notons de plus H' le centre du cercle circonscrit à ADF'. H' est, comme H, sur la médiatrice de $[AD]$, et également, par le raisonnement précédent, sur la droite (KG). Or, comme (AD) n'est pas parallèle à (BC), (KG) n'est pas parallèle à la médiatrice de $[AD]$, et l'on a ainsi $H = H'$. Il en résulte que $F = F'$, et donc que A, B, E et F sont cocycliques.

Reste à traiter le cas où (AB) est parallèle à (CD). Dans ce cas, si A, B, E et F sont cocycliques, la réflexion qui échange A et B échange aussi C et D, E et F et donc G et H. Il en résulte que (GH) est parallèle à (AB) et (CD). La réciproque se traite comme précédemment : on introduit F', le point d'intersection autre que E du cercle circonscrit à ABE avec (CD), et H' le centre du cercle circonscrit à ADF'. Alors H et H' sont tous les deux à l'intersection de la médiatrice de $[AD]$ et de la parallèle à (AB) passant par G, donc ils sont confondus, et $F = F'$.

On a bien montré, dans tous les cas, que (AB), (CD) et (GH) sont concourantes ou parallèles si et seulement si A, B, E et F sont cocycliques.